Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Falls $A \subseteq B$, so folgt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(ii) Für $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ gilt $|P(A) - P(B)| \leq P(A \triangle B)$.

(iii) Gilt $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in N$, so folgt $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

(1+2+2 Punkte)

Beweis. (i) Sei $A \subset B$. Dann ist $B = A \cup (B \backslash A)$. Nun sind A und $B \backslash A$ disjunkt und es folgt

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cup (B \backslash A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geq \mathbb{P}(A).$$

(ii) Wir schreiben A und B als disjunkte Vereinigung:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \dot\cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \dot\cup (A \cap B) \end{aligned}$$

Außerdem fällt uns auf, $A \triangle B$ ist schon als disjunkte Vereinigung definiert, da $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B), \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Das benutzen wir und berechnen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Außerdem gilt $A \cap B \subset A, B$, dann folgt mit Aufgabenteil (i)

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B),$$

und somit

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$

Es gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \\ &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A), & \text{falls } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B), & \text{falls } \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \end{cases} \\ &= |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)|. \end{aligned}$$

(iii) Definiere $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A_0 := \emptyset$. Die B_n sind nun alle disjunkt. Wir stellen fest, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigcup_{n=1}^{N} B_n.$$

Wir erhalten somit insgesamt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N).$$

□

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

(4 Punkte)

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Induktion durch.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{1} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1) = \sum_{\{k_1\} \subset \{1\}} \mathbb{P}(A_{k_1}).$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Wir benutzen direkt im dritten Schritt die Induktionsvoraussetzung zweimal.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A_{n+1})\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j})\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}((A_{k_1} \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_{k_j} \cap A_{n+1}))\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j})\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j} \cap A_{n+1})\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j})\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_{j-1}\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_{j-1}} \cap A_{n+1})\right)
\end{aligned}
$$

Wir stellen fest, dass der $(n+1)$-ste Summand der zweiten Summe gerade $(-1)^n\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})$ ist und schreiben

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + (-1)^n\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j})\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_{j-1}\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_{j-1}} \cap A_{n+1})\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + (-1)^n\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\substack{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n,n+1\} \\ n+1\notin\{k_1,\ldots,k_j\}}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j})\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\substack{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,n,n+1\} \\ n+1\in\{k_1,\ldots,k_j\}}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j})\right).
\end{aligned}
$$

Damit sind wir fertig, da $\mathbb{P}(A_{n+1})$ gerade dem fehlenden Summanden der zweiten Summe entspricht. $\square$

Aufgabe 3

Man erinnere sich an den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Es gilt, dass $\binom{n}{k} \overset{(*)}{=} \binom{n}{n-k}$.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(ii) Geben Sie kombinatorische Interpretationen für $(*)$ und die Formel aus (i) an.

(2+1 Punkte)

Beweis. (i) Wir nutzen die Definition und erweitern die Brüche wie folgt.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{n!k}{n(n-k)!k!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!} \\ &= \frac{k}{n}\binom{n}{k} + \frac{n-k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

(ii) Zu $(*)$: $\binom{n}{k}$ entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge aus n Elementen. Die entspricht offenbar auch der Anzahl der Komplemente dieser Teilmengen. Diese enthalten alle $n-k$ Elemente. Es gibt $\binom{n}{n-k}$ $(n-k)$-elementige Teilmengen einer Menge aus n Elementen.

Zu (i): Nehmen wir an, eine Urne enthalte n Kugeln. Wir markieren eine Kugel rot und betrachten die Anzahl an Möglichkeiten, k Kugeln ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge aus den n Kugeln zu ziehen.
Alle diese Möglichkeiten entsprechen einem der folgenden Fälle: Die rote Kugel wurde gezogen oder eben nicht.
Im ersten Fall könnte man genauso die rote Kugel festhalten und noch $k-1$ Kugeln aus den $n-1$ anderen Kugeln ziehen (und der einen roten Kugel hinzulegen) und im zweiten Fall eben k Kugeln aus den $n-1$ nicht-roten Kugeln ziehen.

$\square$

Aufgabe 4

Nutzen Sie ihr Wissen über Kombinatorik um folgende Fragen zu beantworten.

(i) Wir betrachten ein regelmäßiges N-Eck. Wie viele Linien entstehen, wenn man alle Punkte miteinander verbindet?

(ii) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(iii) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

(iv) Wie viele 4-stellige Zahlen mit Quersumme 9 gibt es?

(v) Die Lottoziehung (6 aus 49) ist vorbei, die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

(vi) Wir haben N Bücher. Unter diesen Büchern gibt es M gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die N Bücher in einem Regel nebeneinander anzuordnen?

(6 Punkte)

Beweis. (i) Es gibt N Punkte, und eine Linie ist eine Verbindung zwischen zwei Punkten. Das heißt, die Anzahl der Linien entspricht der Anzahl an Möglichkeiten, aus N Punkten zwei ohne Zurücklegen auszuwählen. Für ein verbundenes Paar an Punkten gibt es nur eine Linie, also wird 'ohne Reihenfolge' gezogen.
Antwort: $\binom{N}{2}$.

(ii) Die Hotelgäste kriegen jeder ein festes Zimmer, also wählen sie 'mit Reihenfolge'. Da es nur Einzelzimmer gibt, entspricht dies dem Ziehen ohne Zurücklegen.
Antwort: $\frac{10!}{(10-7)!}$

(iii) Analog zum Urnenmodell: Wir ziehen fünf mal aus der Urne mit den 2 Kugeln 'an' und 'aus'. Die Reihenfolge ist relevant, da es sich um fünf individuelle Lampen handelt. Die Situation entspricht dem 'mit Zurücklegen', da jede Lampe neu an/aus auswählen kann.
Antwort: 2^5.

(iv) $n = 9$ mal wir die Zahl 1 auf 4 Positionen (den Ziffern entsprechend) aufgeteilt. Es wird also n-mal ohne Reihenfolge mit Zurücklegen aus einer Menge mit 4 Elementen gezogen. Nun müssen noch alle Möglichkeiten abgezogen werden, in der die erste Ziffer nicht gewählt wurde. Das sind ebenso viele, wie es Möglichkeiten gibt eine maximal 3-stellige Zahl mit Quersumme 9 zu erzeugen, was gerade dem 'n-mal ohne Reihenfolge mit Zurücklegen aus einer Menge mit 3 Elementen' entspricht.
Antwort: $\binom{9+4-1}{9} - \binom{9+3-1}{9}$

(v) Die 49 Zahlen sind in zwei Gruppen aufgeteilt: 43 verlierende Zahlen und 6 gewinnende Zahlen. Frage ist, wie viele Möglichkeiten es gibt, 3 Zahlen aus 43 und 3 Zahlen aus 6 zu ziehen. Die Anzahl beider Möglichkeiten müssen schließlich multipliziert werden. Die Ziehungen erfolgen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen, denn jede Zahl kann nur einmal gezogen werden.
Antwort: $\binom{43}{3} \cdot \binom{6}{3}$.

(vi) Wären alle N Bücher verschieden, würde die Situation dem Ziehen in Reihenfolge ohne Zurücklegen (von N Elementen aus N Elementen) entsprechen. Das wären $N!$ Möglichkeiten. M-viele Bücher sind aber nicht unterscheidbar. Diese M Bücher können $M!$-mal unbemerkt vertauscht werden. Das bedeutet, dass $M!$-mal zu viele Möglichkeiten gezählt wurden.
Antwort: $\frac{N!}{M!}$.

$\square$