Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ und $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung

$$\mathbb{P}(\,\cdot\,|B) : A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$$

für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert wird.

(3 Punkte)

Beweis. Da $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, gilt für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1,$$

wie wir in (i) unten sehen werden. Es wurde genutzt, das $A \subseteq \Omega \Rightarrow A \cap B \subseteq \Omega \cap B$. Mit (ii) folgt, dass tatsächlich in $[0, 1]$ abgebildet wird.
Wir überprüfen die Axiome von Kolmogorov.

(i) Da $B \subset \Omega$, gilt

$$\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

(ii) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0,$$

da $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ weil $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsverteilung ist und $\mathbb{P}(B) > 0$ nach Voraussetzung.

(iii) Seien nun $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Dann sind auch die Mengen $A_i \cap B$ paarweise disjunkt und es gilt da $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B).\end{aligned}$$

□

Kleiner Einschub für die Übungsgruppe:

Unabhängig davon, dass $\mathbb{P}(B)$ größer als 0 sein muss und das schon ein Problem ist (Wir müssten die σ-Algebra einschränken und wir betrachten momentan nur die Potenzmenge als σ-Algebra.), finden wir ein Gegenbeispiel zu der Aussage 'Die Zuordnung $\mathbb{P}(A|\,\cdot\,)$:

$B \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$'. Sei $\Omega = \{a, b\}$ für zwei Elemente $a \neq b$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten folgendes $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{A}$.

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{a, b\}) = 1.$$

Sei nun $A = \{a\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \mid \Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

Also ist $\mathbb{P}(A \mid \cdot\,)$ keine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\emptyset$ und Ω von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig sind.

(ii) Zeigen Sie: Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.

(iii) Ein fairer Würfel (die Augenzahlen von 1 bis 6 werden liegen mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben), werde zweimal unabhängig voneinander geworfen (siehe Beispiel 1.2 (ii) im Skript).
Wir definieren die folgenden Ereignisse.

$$\begin{aligned} A &= \text{'Die erste Augenzahl ist gerade'}, \\ B &= \text{'Die zweite Augenzahl ist gerade'}, \\ C &= \text{'Die Summe der Augenzahlen ist ungerade'}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig, aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

(1+2+2 Punkte)

Beweis. (i) Es gilt für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \emptyset) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset), \\ \mathbb{P}(A \cap \Omega) &= \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega). \end{aligned}$$

(ii) Seien A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig. Damit sind auch A, B stochastisch unabhängig, und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &\overset{A,B,C \text{ stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &\overset{A,B \text{ stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A \cap B) \cdot \mathbb{P}(C). \end{aligned}$$

Also sind $(A \cap B), C$ stochastisch unabhängig.
Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &\overset{\text{stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &\overset{A,B \text{ stoch. unabh.}}{=} (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) \cdot \mathbb{P}(C). \end{aligned}$$

Damit sind $(A \cup B), C$ stochastisch unabhängig.

(iii) Wir modellieren einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wie folgt.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(w_1, w_2) : w_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ für } i = 1,2\},$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$

und sei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung auf $\mathcal{A}$. Damit ist jedes Ergebnis der beiden Würfelwürfe gleichwahrscheinlich. Ein Element $(w_1, w_2) \in \Omega$ hat die Interpretation: 'w_1 ist das Ergebnis des ersten Wurfs, w_2 das Ergebnis des zweiten Wurfs'.
Nun gilt

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \#A = 18, \\ B &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{2,4,6\}, \quad \#B = 18. \end{aligned}$$

und

$$C = (\{2,4,6\} \times \{1,3,5\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{2,4,6\}), \quad \#C = 18.$$

Wir haben nun:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}^2) = \frac{9}{36} = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

woraus folgt, dass A, B stochastisch unabhängig sind (Das ist im Grunde auch direkt aus der Aufgabenstellung zu entnehmen, in der gesagt wird, dass die beiden Würfe unabhängig voneinander ausgeführt werden). Weiter haben wir

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{2,4,6\} \times \{1,3,5\}) = \frac{9}{36} = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C),$$

woraus folgt, dass A, C stochastisch unabhängig sind. Analoges Vorgehen für B, C, die dann ebenfalls stochastisch unabhängig sind.
Allerdings gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$

womit A, B, C nicht gemeinsam unabhängig sind.

$\square$

Aufgabe 3

Ein Würfel wird N-mal unabhängig geworfen, wobei N eine zufällige Zahl sei. Sei A_n das Ereignis, dass $N = n$ und S_M das Ereignis, dass die Summe der geworfenen Augenzahl gleich M ist. Des Weiteren möchten wir Folgendes annehmen.

(a) Für jeden der Würfelwürfe gilt: Alle sechs Seiten liegen mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben (Der Würfel ist *fair*),

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$.

Wir möchten das obige Experiment modellieren.

(i) Geben Sie eine geeignete nichtleere Menge Ω von Stichproben und eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ an, sodass $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und (a) und (b) erfüllt sind.

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(ii) $\mathbb{P}(A_2 | S_4)$,

(iii) $\mathbb{P}(S_4 | A_G)$, wobei A_G das Ereignis bezeichnet, dass N gerade ist.

(7 Punkte)

Beweis. (i) Wir geben das Modell wie folgt an

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_N) |\ \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}, i = 1, \ldots, N, N \in \mathbb{N}\}.$$

Jedes Element aus Ω ist darstellbar als Tupel $(\omega_1, \ldots \omega_{\tilde{N}})$ für ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$. Es ist klar, dass

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_{\tilde{N}})\}) = \frac{1}{6^{\tilde{N}}} \frac{1}{2^{\tilde{N}}} = \frac{1}{12^{\tilde{N}}}$$

gelten muss, da es $6^{\tilde{N}}$ Möglichkeiten gibt, wenn man $\tilde{N}$-mal würfelt und diese Möglichkeiten alle gleichwahrscheinlich sind, wenn der Würfel fair ist.
Wir definieren also konsistent dazu $\mathbb{P}$ durch

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{a \in A} \mathbb{P}(\{a\}).$$

Das zweite und dritte der Axiome von Kolmogorov sind offensichtlich erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, da damit auch (zusammen mit der Definition) klar ist, dass $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Wir schreiben Ω wie folgt als offensichtlich disjunkte Vereinigung

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) | \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Also können wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) | \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}, i = 1, \ldots, n\}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.\end{aligned}$$

(ii) Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (oder dem Satz von Bayes) gilt

$$\mathbb{P}(A_2 | S_4) = \frac{\mathbb{P}(S_4 | A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(S_4)}.$$

Beachte, dass man mit mehr als 4 Würfelwürfen nicht mehr eine Augensumme von 4 erreichen kann. Wir sehen sofort, dass

$$S_4 = \{(4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_4 | A_1) &= \frac{1}{6}, \\ \mathbb{P}(S_4 | A_2) &= \frac{3}{6^2}, \\ \mathbb{P}(S_4 | A_3) &= \frac{3}{6^3}, \\ \mathbb{P}(S_4 | A_4) &= \frac{1}{6^4}, \\ \mathbb{P}(S_4) &= \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\frac{3}{6^2} + \frac{1}{8}\frac{3}{6^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{6^4} \approx 0,106.\end{aligned}$$

Damit berechnen wir insgesamt

$$\mathbb{P}(A_2 | S_4) \approx \frac{\frac{3}{6^2} \cdot \frac{1}{4}}{0,106} \approx 0, 0, 197.$$

(iii) Hier nutzen wir (wieder) die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit bzw. den Satz von Bayes und dass die Würfelwürfe selbst unabhängig von N sind.

$$\mathbb{P}(S_4|A_G) = \frac{\mathbb{P}(S_4 \cap A_G)}{\mathbb{P}(A_G)} = \frac{\sum_{n=1,n \text{ gerade}}^{\infty} \mathbb{P}(S_4|A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\sum_{n=1,n \text{ gerade}}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)}.$$

Hier sind alle Summanden für A_n mit n ungerade weggefallen, da $\mathbb{P}(S_4|A_n), \mathbb{P}(A_n) = 0$. Die Sätze ist anwendbar, da alle A_n disjunkt sind und offensichtlich $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Aus den obigen Überlegungen wissen wir, dass die Summe im Zähler nur zwei Summanden hat. Wir erhalten insgesamt

$$\mathbb{P}(S_4|A_G) = \frac{\mathbb{P}(S_4|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(S_4|A_4) \cdot \mathbb{P}(A_4)}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}} = \frac{\frac{3}{6^2}\frac{1}{4} + \frac{1}{6^4}\frac{1}{16}}{\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1} \approx 0.063.$$

□

Aufgabe 4

Sie seien nun Teilnehmer:in einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem der Tore ist ein Auto, hinter den anderen jeweils eine Ziege. Die Objekte wurden vor der Show zufällig auf die Tore verteilt.
Sie wählen ein Tor. Daraufhin öffnet der Showmaster (Dieser weiß, was hinter den Toren ist), ein anderes Tor (Hat er zwei Möglichkeiten, wählt er aus beiden mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Er fragt Sie nun, ob Sie ihre Entscheidung ändern möchten. Ist es von Vorteil, das andere Tor zu wählen?
Definieren Sie zur Lösung die Ereignisse A_i := 'Hinter Tor i ist das Auto' und B_j := 'Moderator öffnet Tor j'. Drücken Sie nun die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten eines Gewinns mittels A_i und B_j für $i, j = 1, 2, 3$ aus.

(3 Punkte)

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass wir Tor 1 gewählt haben, da die Objekte vor der Show zufällig auf die Tore verteilt werden. Es gilt insbesondere

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}$$

für $i = 1, 2, 3$. Ebenso sagen wir o.B.d.A., dass der Moderator Tor 3 öffnet (Das Problem ist symmetrisch). Außerdem gilt für die Wahl des Moderators:

$$\mathbb{P}(B_3|A_1) = \frac{1}{2},$$

denn er entscheidet sich 'zufällig' mit gleicher Wahrscheinlichkeit für Tor 2 oder Tor 3, wenn hinter Tor 1 bereits der Preis ist,

$$\mathbb{P}(B_3|A_2) = 1, \qquad \mathbb{P}(B_3|A_3) = 0,$$

da er nicht das gewinnende Tor öffnen kann.

Wir interessieren uns nun für den Vergleich der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_1|B_3)$ und $\mathbb{P}(A_2|B_3)$. Auf Basis dessen können wir entscheiden, ob es sinnvoller ist, zu wechseln, oder nicht. Wir benutzen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten die Formel von Bayes. Offensichtlich gilt $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ und die A_i sind paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2|B_3) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{\mathbb{P}(B_3|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B_3|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_3|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B_3|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} + 1 + 0)} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

und mit der gleichen Technik (oder $\mathbb{P}(A_2|B_3) + \mathbb{P}(A_1|B_3) = 1$) erhalten wir

$$\mathbb{P}(A_1|B_3) = \frac{1}{3}.$$

Damit ist es sinnvoller, das Tor zu wechseln und nun Tor 2 auszuwählen, da die Wahrscheinlichkeit größer ist, dann zu gewinnen. $\square$