Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Loesungsskizzen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Sei Ω eine nichtleere und abzählbare Menge und $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Sei des weiteren $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable.

(i) Zeigen Sie, dass die von X induzierte Verteilung $\mathbb{P}^X$ in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega^X, \mathcal{P}(\Omega^X)$ definiert.

Wir betrachten eine diskrete Zufallsvarible $Y : \Omega^X \to \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie die Verträglichkeit des Bildmaßes mit der Komposition von Abbildungen, d.h. zeigen Sie

$$\left(\mathbb{P}^X\right)^Y = \mathbb{P}^{(Y\circ X)}.$$

(3+2 Punkte)

Beweis. (i) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathrm{Bild}(X)$ nichtleer und abzählbar ist, da Ω nichtleer und abzählbar ist. Wir betrachten die Definition von $\mathbb{P}^X$.

$$\mathbb{P}^X : \mathcal{P}(\mathrm{Bild}(X)) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A)).$$

Für alle solche A gilt offensichtlich $X^{-1}(A) \subset \Omega$, d.h. $X^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Abbildung ist wohldefiniert und es gilt

$$0 \leq \mathbb{P}^X(A) \leq 1.$$

Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{P}^X(\mathrm{Bild}(X)) = 1$. Es gilt

$$\mathbb{P}^X(\mathrm{Bild}(X)) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathrm{Bild}(X))) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Zuletzt betrachten wir eine Familie disjunkter Mengen $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathrm{Bild}(X))$ für eine Indexmenge I. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} X^{-1}(A_i)\right)\\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}^X(A_i),\end{aligned}$$

wobei hier bloß die elementare Eigenschaft verwendet wurde, dass die Urbilder disjunkter Mengen wieder disjunkt sind.

(ii) Wir stellen fest, dass $Y \circ X : \Omega \to \mathrm{Bild}(X) \to \mathbb{R}$ tatsächlich wohldefiniert ist. Mit (i) ist leicht zu sehen, dass alle betrachteten Objekte Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind. Sei $A \in \mathcal{P}(\mathrm{Bild}(Y))$, dann gilt

$$\left(\mathbb{P}^X\right)^Y(A) = \mathbb{P}^X(Y^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X^{-1}(Y^{-1}(A))) = \mathbb{P}((Y \circ X)^{-1}(A) = \mathbb{P}^{Y\circ X}(A).$$

$\square$

Aufgabe 2

Auf einem Jahrmarkt bietet ein Stand folgendes Gewinnspiel an.
Auf einem Glücksrad sind die Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 abgebildet. Wenn Sie einmal drehen, kommen alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Sie drehen das Glücksrad (bei gleicher Ausgangsposition) nun zweimal unabhängig voneinander. Sie gewinnen, wenn die größte dabei erschienene Zahl genau eine -1 ist.

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ an, der das obige Zufallsexperiment geeignet darstellt.
Definieren Sie dann eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die einem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ die größte erschienene Zahl zuordnet.

(ii) Geben Sie die Elemente von $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1\}$ an und berechnen Sie $\mathbb{P}(X = -1)$.

(iii) Geben Sie den induzierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^X, \mathcal{P}(\Omega^X), \mathbb{P}^X)$ von X an.

(iv) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(2+1+1+2 Punkte)

Beweis. (i) Wir definieren

$$\begin{aligned} \Omega &= \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}^2 \\ &= \{(\omega_1, \omega_2) |\ \omega_i \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}, i = 1,2\}, \\ X : \Omega \to \mathbb{R},\ & X(\omega_1, \omega_2) := \max\{\omega_1, \omega_2\} \end{aligned}$$

und es sei $\mathbb{P}$ die Laplaceverteilung, da alle Ereignisse als gleichwahrscheinlich angenommen werden.

(ii)

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1\} = \{(-1,-3), (-1,-2), (-1,-1), (-2,-1), (-3,-1)\}.$$

Damit ($\mathbb{P}$ Laplace-Verteilung):

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{5}{|\Omega|} = \frac{5}{7^2}.$$

(iii) Das Maximum zweier Zahlen aus $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ kann jede Zahl aus Ω sein, daher

$$\Omega^X = \mathrm{Bild}(X) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

Zur Berechnung der Zähldichte $\mathbb{P}^X(\{x\})$ ist Anzahl der Elemente von $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \{\omega \in \Omega : \max(w_1, w_2) = x\}$ gesucht.
Zwei Möglichkeiten zur Berechnung (außer Auszählen):

- Es gibt insgesamt drei Fälle: Entweder $w_1 = w_2 = x$ (1 Möglichkeit), oder $w_1 = x$ und $w_2 < x$ ($3 + x$ Möglichkeiten), oder $w_1 < x$ und $w_2 = x$ ($3 + x$ Möglichkeiten). Daher gilt $\#\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = 2(3 + x) + 1 = 2x + 7$.
- Zunächst gibt es $(4+x)^2$ Möglichkeiten, dass w_1, w_2 beide Werte aus $\{-3,-2,...,x\}$ annehmen. Nun haben wir aber die Möglichkeiten zuviel gezählt, dass beide w_1, w_2 nur Werte aus $\{-3,-2,...,x-1\}$ annehmen. Dafür gibt es $(3+x)^2$ Möglichkeiten. Daher gilt $\#\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = (4+x)^2 - (3+x)^2 = 2x+7$.

Insgesamt erhalten wir für $x \in \Omega^X$:

$$\mathbb{P}^X(\{x\}) = \frac{2x+7}{7^2}.$$

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=-3}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^X(\{k\}) = \frac{1}{7^2} \sum_{k=-3}^{\lfloor x \rfloor} (2k+7) \\ &= \begin{cases} 0, & x < -3, \\ \frac{1}{7^2}, & -3 \leq x < -2, \\ \frac{4}{7^2}, & -2 \leq x < -1, \\ \frac{9}{7^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{16}{7^2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{25}{7^2}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{36}{7^2}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

Wie man sehen kann, ist also $F_X(x) = \frac{\lfloor x+4 \rfloor^2}{7^2}$ im Bereich $x \in [-3, 4)$, falls man das abrunden immer als Verkleinern der Zahl versteht.

□

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von X sei mit $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass F monoton wachsend ist. Das heißt, dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$,

(iii) Zeigen Sie, dass F rechtsseitig stetig ist, d.h. für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \searrow x$ gilt $F(x_n) \to F(x)$.

Hinweis für (ii), (iii): Nutzen Sie Aufgabe 1(iii) von Blatt 1.

(2+2+1 Punkte)

Beweis. (i) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$. Dann gilt offensichtlich

$$\{X \leq x_1\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_1\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_2\} = \{X \leq x_2\},$$

und daher $F(x_1) = \mathbb{P}(X \leq x_1) \leq \mathbb{P}(X \leq x_2) = F(x_2)$.

(ii) Es ist wichtig, hier die Definition des Grenzwerts auf die Definition über Folgen zurückzuführen, da wir nur Aussagen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit Folgen von Mengen zur Verfügung haben.

- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$:
  Es genügt zu zeigen, dass für jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \to \infty$ gilt, dass $F(x_n) \to 1$.

  Analytischer Zusatz: Ist (x_n) Folge mit $x_n \to \infty$, so gibt es in jedem Fall *eine monoton wachsende Teilfolge (x_{n_k}). Wird dann für diese das Resultat $F(x_{n_k}) \to 1$ gezeigt, so folgt wegen der Monotonie von F und der Beschränktheit nach oben durch 1 dann auch $F(x_n) \to 1$, denn: Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass gilt: $F(x_{n_{k_0}}) \geq 1-\varepsilon$. Wegen $x_n \to \infty$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $x_n \geq x_{n_{k_0}}$. Dann ist wegen der Monotonie $F(x_n) \geq F(x_{n_{k_0}}) \geq 1-\varepsilon$.*

Die Mengen $A_n := \{X \leq x_n\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\}$ bilden eine aufsteigende Folge von Elementen von $\mathcal{A}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_n \subset A_{n+1}$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} &\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x_n\} \\ &\to \Omega \qquad (x_n \to \infty).\end{aligned}$$

Nach Blatt 1, Aufgabe 1(iii) gilt dann

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$:
  Es genügt (wie oben) zu zeigen, dass für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \to -\infty$ gilt, dass $F(x_n) \to 0$.

  Wir definieren $A_n := \{X_n \leq x_n\}$, diese bilden eine absteigende Folge von Elementen von $\mathcal{A}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_{n+1} \subset A_n$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} &\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x_n\} \\ &\to \emptyset \qquad (x_n \to -\infty).\end{aligned}$$

  Wir nutzen nun eine Abwandlung der Aussage von Blatt 1, Aufgabe 1(iii) mit Hilfe der de Morganschen Regeln. Beachte dazu, dass nun folgendes gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. Damit

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).\end{aligned}$$

(iii) Exakt gleiches Vorgehen wie bei $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
Definiere $A_n := \{X \leq x_n\}$. Diese Folge erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} \subset A_n$ bzw. $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. Außerdem ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x_n\} \overset{x_n \searrow x}{=} \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x\}.$$

Die Teilmengenrelation $\supset$ oben ist wegen $x_n \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ klar. Die Teilmengenrelation $\subset$ ist erfüllt, da aus $X(\omega) \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $X(\omega) \leq x$ durch Limesbildung auf beiden Seiten.
Damit haben wir wie zuvor mit Blatt 1, Aufgabe 1(iii), dass

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

□

Aufgabe 4

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ ihre Verteilungsfunktion.

(a) Sei $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie F.

(b) Sei nun $X \sim \mathcal{G}(p)$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0,1)$. Berechnen Sie F.

(2+2 Punkte)

Beweis. (i) $X \sim \mathcal{B}(5, 1/2)$ bedeutet, dass $\Omega^X = \{0,1,2,3,4,5\}$ und für alle $x \in \Omega^X$ gilt

$$\mathbb{P}^X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Die Verteilungsfunktion ist daher für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^X(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{5}{x} \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^5, & 0 \leq x < 1, \\ 6 \ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, & 1 \leq x < 2, \\ 16 \ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, & 2 \leq x < 3, \\ 26 \ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, & 3 \leq x < 4, \\ 31 \ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & 5 \leq x \end{cases} . \end{aligned}$$

(ii) $X \sim \mathcal{G}(p)$ bedeutet, dass $\Omega^X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ und für alle $x \in \Omega^X$ gilt:

$$\mathbb{P}^X(x) = \mathbb{P}(X = x) = p \cdot (1-p)^{x-1}.$$

Die Verteilungsfunktion ist daher für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) &= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^X(k) \\ &= p \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} (1-p)^k \\ &= p \cdot \frac{1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor}. \end{aligned}$$

$\square$