Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig verteilte Zufallsvariable.

(i) Sei $X \sim \mathcal{R}[0,1]$, d.h. X ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

(a) Berechnen Sie die Verteilung von $Y_1 := -2\log(X)$.

(b) Berechnen Sie die Dichte von $Y_2 := X^2$.

(ii) Sei $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, d.h. X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie die Verteilung von $Y := \alpha X$, wobei $\alpha > 0$.

(1+2+1 Punkte)

Beweis. (i) (a) Wir benutzen Satz 6.16 über die Transformation von Zufallsvariablen. Wir haben $Y_1 = g(X)$ mit $g(x) = -2\log(x)$. g ist stetig differenzierbar und streng monoton fallend. Damit gilt für die Dichte von Y_1, dass

$$f_{Y_1}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right|.$$

Hier ist $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Und nun $g^{-1}(y) = \exp(-y/2)$ offensichtlich, also $\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\exp(-y/2)$. Damit

$$f_{Y_1}(y) = \mathbb{1}_{\{0 \le \exp(-y/2) \le 1\}} \cdot \frac{1}{2}\exp(-y/2) = \frac{1}{2}\exp(-y/2) \cdot \mathbb{1}_{\{y \ge 0\}},$$

das ist die Dichte einer $\mathcal{E}(1/2)$-Verteilung, d.h. $Y_1 \sim \mathcal{E}(1/2)$.

(b) Wir gehen wie in der (a) vor. $g_2 : [0,1] \mapsto [0,1], x \mapsto x^2$ ist auf $[0,1]$ streng monoton steigend und stetig differenzierbar. Nun ist $g_2^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$ und $\frac{\partial}{\partial y} g_2^{-1} : y \mapsto \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Für die Dichte von Y_2 gilt für $y \in [0,1]$ also

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y) &= f_X(g_2^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial y} g_2^{-1}(y).\right| \\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Für die Übungsgruppe:

Wäre nun $X \sim \mathcal{R}[-1,1]$, könnte der Satz der Vorlesung nicht benutzt werden, da die Funktion $x \mapsto x^2$ nicht streng monoton ist. Wir würden die Verteilung händisch berechnen. Die Dichte von X lautet $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, die Verteilungsfunktion entsprechend für $x \in [-1,1]$, dass $F_X(x) = \frac{x+1}{2}$. Wir erhalten für die Verteilungsfunktion von Y für $y \in [0,1]$ folgendes

$$\begin{aligned} F_{Y_2}(y) &= \mathbb{P}(Y_2 \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y, X \ge 0) + \mathbb{P}(X^2 \le y, X < 0) \\ &= \mathbb{P}(0 \le X \le \sqrt{y}) + \mathbb{P}(-\sqrt{y} \le X < 0) = 2\mathbb{P}(0 \le X \le \sqrt{y}) \\ &= 2\Big(F_X(\sqrt{y}) - F_X(0)\Big) = 2\Big(\frac{\sqrt{y}+1}{2} - \frac{1}{2}\Big) = \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Für die Dichte erhalten wir durch Ableiten

$$f_{Y_2}(y) = F'_{Y_2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Da $X \in [-1, 1]$, ist $Y_2 = X^2 \in [0, 1]$. Für $y \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ gilt daher $f_{Y_2}(y) = 0$. Alternativ könnte ein Symmetrieargument diese Aufgabe auf den selben Fall wie in dem eigentlichen Problem (b) zurückführen.

(ii) Wir können hier direkt die Bermekung 6.15 aus der Vorlesung über die linearen Transformation von Zufallsvariablen mit $b = 0$ und $a = \alpha$ benutzen. Es gilt für die Dichte von Y, dass

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} f_X(\frac{y}{\alpha}) = \frac{\lambda}{\alpha} \exp(-\frac{\lambda}{\alpha} y) \mathbb{1}_{\{y/\alpha \geq 0\}} = \frac{\lambda}{\alpha} \exp(-\frac{\lambda}{\alpha} y) \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}},$$

das ist die Dichte einer $\mathcal{E}(\lambda/\alpha)$-Verteilung.

$\square$

Aufgabe 2

Sei Ω eine nichtleere Menge.

(i) Beweisen oder widerlegen Sie, ob die folgenden Mengensysteme σ-Algebren sind.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{A \subset \Omega : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich } \}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar } \} \end{aligned}$$

(ii) Sei I eine Indexmenge und $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ eine Menge von σ-Algebren über Ω. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \subset \Omega : \forall i \in I : A \in \mathcal{A}_i\}$ wieder eine σ-Algebra über Ω ist.

(iii) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Vereinigung zweier σ-Algebren über Ω keine σ-Algebra mehr sein muss.

(iv) Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B} := A(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{[c, d] : c, d \in \mathbb{R}\}$ auch von folgenden Mengensystemen $\mathcal{E}_i$ erzeugt wird, d.h. $\mathcal{B} = A(\mathcal{E}_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

$$\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ offen}\}, \quad \mathcal{E}_3 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$$

(2+1+1+3 Punkte)

Beweis. (i) $\mathcal{A}_1$ ist im Allgemeinen keine σ-Algebra. Sei dazu $\Omega = \mathbb{N}$. Dann betrachte für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n := \{2n\}$. Diese sind alle endlich; Sie bestehen nur aus einem Element, d.h. $A_n \in \mathcal{A}_1$. Also sollte $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A}_1$ gelten. Dies ist nun eine unendliche Menge, die Menge der geraden Zahlen. Ihr Komplement

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \mathbb{N} \setminus \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

die Menge der ungeraden Zahlen, ist ebenfalls unendlich. Damit ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{A}_1$, was im Widerspruch zur Definition einer σ-Algebra steht.

$\mathcal{A}_2$ ist eine σ-Algebra. Zu zeigen sind die drei Eigenschaften einer σ-Algebra über Ω.

- Es ist $\Omega^c = \emptyset$ abzählbar. Daher ist $\Omega \in \mathcal{A}_2$.
- Sei $A \in \mathcal{A}_2$.
  Fall 1: A abzählbar. Dann ist $A = (A^c)^c$ abzählbar, d.h. $A^c \in \mathcal{A}_2$.
  Fall 2: A^c abzählbar. Dann ist $A^c \in \mathcal{A}_2$.
- Seien $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_2$.
  Fall 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass A_n abzählbar ist. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_2$.
  Fall 2: Es gibt ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $A_{n'}$ ist nicht abzählbar. Da $A_{n'} \in \mathcal{A}_2$, muss dann $A_{n'}^c$ abzählbar sein. Es folgt mit den de Morganschen Regeln, dass $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ abzählbar ist, da mindestens eine Menge im Durchschnitt enthalten ist, die nur abzählbar viele Elemente enthält. Es folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_2$.

(ii) Sei $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren. Wir zeigen, dass $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra ist.

- Für alle $i \in I$ gilt, dass $\Omega \in \mathcal{A}_i$, da $\mathcal{A}_i$ alle σ-Algebren sind. Somit $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
- Sei $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Dann ist $A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Es folgt, das $\mathcal{A}_i$ alle σ-Algebren sind, dass $A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Damit ist $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
- Seien nun $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Dann folgt $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Da $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren sind, folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Damit ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

(iii) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\},\\ \mathcal{A}_2 &:= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\}\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ ist eine σ-Algebra, $\mathcal{A}_2$ ist keine σ-Algebra.

Beweis. $\mathcal{A}_1$ ist eine σ-Algebra, denn:

- $\Omega \in \mathcal{A}_1$,
- Sei $A \in \mathcal{A}_1$. Dann ist jeweils $A^c \in \mathcal{A}_1$, wie man im Folgenden sieht:
  $$\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{A}_1, \{1\}^c = \{2,3\} \in \mathcal{A}_1, \{2,3\}^c = \{1\} \in \mathcal{A}_1, \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}_1$$
- Da $\mathcal{A}_1$ nur aus endlich vielen Mengen besteht, müssen wir nur endliche Vereinigungen untersuchen. Vereinigungen mit $\emptyset$ und Ω müssen nicht untersucht werden, da das Ergebnis dann entweder gleich bleibt oder ganz Ω wird, was ebenfalls in $\mathcal{A}_1$ enthalten ist. Es bleibt also nur eine einzige Vereinigung zu untersuchen: Für $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$ gilt
  $$A_1 \cup A_2 = \Omega \in \mathcal{A}_1,$$
  womit auch die dritte Eigenschaft einer σ-Algebra gezeigt ist.

$\mathcal{A}_2$ ist keine σ-Algebra, da $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{A}_2$, aber $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{A}_2$. □

Wähle

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &:= \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\},\\ \mathcal{B}_2 &:= \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}.\end{aligned}$$

zwei σ-Algebren (siehe Einschub $\mathcal{A}_1$). Aber

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2,$$

was keine σ-Algebra ist.

(iv) Angenommen, wir haben $\mathcal{E}_1 \subset A(\mathcal{E})$ gezeigt. Weil $A(\mathcal{E}_1)$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}_1$ enthält und $A(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist, muss $A(\mathcal{E}_1) \subset A(\mathcal{E})$ gelten.
Wir müssen also nur $\mathcal{E}_1 \subset A(\mathcal{E})$ und $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}_1)$ zeigen, damit $A(\mathcal{E}_1) \subset A(\mathcal{E})$ und $A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}_1)$ folgt, d.h. $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E})$.

- $\mathcal{E}_1 \subset A(\mathcal{E})$: Das bedeutet, wir müssen ein beliebiges Element $(a,b) \in \mathcal{E}_1$ mit $a < b$ durch Elemente von $\mathcal{E}$ darstellen. Hier gilt

$$(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]}_{\in\mathcal{E}} \in A(\mathcal{E}).$$

- $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}_1)$: Sei $[c,d] \in \mathcal{E}$. Dann ist

$$[c,d] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(c - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n})}_{\in\mathcal{E}_1} \in A(\mathcal{E}_1)$$

  Man beachte, dass auch abzählbare Schnitte (nicht nur abzählbare Vereinigungen) wieder in der σ-Algebra enthalten sind. Das folgt direkt aus den de Morganschen Regeln.

Da wir nun bereits wissen, dass $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$ gilt, werden wir im Folgenden $A(\mathcal{E}_2) = A(\mathcal{E}_1)$ zeigen anstatt $A(\mathcal{E}_2) = A(\mathcal{E})$.

- $\mathcal{E}_2 \subset A(\mathcal{E}_1)$: Sei $U \in \mathcal{E}_2$, d.h. $U \subset \mathbb{R}$ offen. Für jedes $x \in U \cap \mathbb{Q}$ wähle $\varepsilon_x > 0$ sodass $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U$. Das geht gerade wegen der Definition von U als offene Menge. Dann ist

$$U = \bigcup_{x\in U\cap\mathbb{Q}} \underbrace{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)}_{\in\mathcal{E}_1} \in A(\mathcal{E}_1).$$

- $\mathcal{E}_1 \subset A(\mathcal{E}_2)$: Sei $(c,d) \in \mathcal{E}_1$. Dann gilt trivialerweise $(c,d) \in \mathcal{E}_2 \subset A(\mathcal{E}_2)$, da (c,d) offen ist.

Wir gehen für die dritte Menge an Erzeugern wieder wie bei $\mathcal{E}_1$ vor.

- $\mathcal{E}_3 \subset A(\mathcal{E})$: Sei $(-\infty, a] \in \mathcal{E}_3$. Dann gilt

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[n, a]}_{\in\mathcal{E}} \in A(\mathcal{E}).$$

- $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}_3)$: Sei $[c,d] \in \mathcal{E}$. Dann gilt

$$(-\infty, c) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(-\infty, c - \frac{1}{n}]}_{\in\mathcal{E}_3} \in A(\mathcal{E}_3),$$

  und daher

$$[c,d] = (-\infty, d] \setminus (-\infty, c) = (-\infty, d] \cap (-\infty, c)^c \in A(\mathcal{E}_3).$$

□

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig verteilte Zufallsvariable mit stetiger, überall positiver Dichte f_X. Sei $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass $Y := F_X(X) \sim \mathcal{R}[0,1]$, d.h. Y ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

(3 Punkte)

Beweis. Wir benutzen den Satz 6.16 über die Transformation von stetigen Zufallsvariablen. Beachte, dass nach Definition gilt: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x$. Da f_X stetig ist, ist F_X nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar. Da $f_X > 0$ überall ist, ist $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion $F_X^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Nach Satz 6.16 gilt für die Dichte von Y für $y \in [0,1]$, dass

$$f_Y(y) = f_X(F_X^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} F_X^{-1}(y) \right|. \tag{1}$$

Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion und $F_X'(x) = f_X(x)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} F_X^{-1}(y) = \frac{1}{F_X'(F_X^{-1}(y))} = \frac{1}{f_X(F_X^{-1}(y))} \geq 0$$

Das kann auch hergeleitet werden, indem man $F_X^{-1}(F_X(x)) = x$ nach x mit der Kettenregel ableitet. Dann folgt $\frac{\partial}{\partial y} F_X^{-1}(F_X(x)) \cdot F_X'(x) = 1$.
Eingesetzt in (1) folgt für $y \in [0,1]$ dann

$$f_Y(y) = f_X(F_X^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} F_X^{-1}(y) \right| = 1.$$

Da offensichtlich $F_X(X) \in [0,1]$ gilt, ist $f_Y(y) = 0$ für $y \in \mathbb{R} \backslash [0,1]$. Insgesamt erhalten wir

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y),$$

was die Dichte einer Gleichverteilung auf $[0,1]$ ist, also $Y \sim U[0,1]$.

□

Aufgabe 4

Eine Forschungsgruppe untersucht die Halbwertszeit von ^{60}Co. Die bisher vermutete Halbwertszeit beträgt $\lambda_0 = 5.2714$ Jahre. Die Forscher beobachten nun in einem Experiment eine Halbwertszeit von $X = 13$ Jahren.
In ihrem Modell nehmen die Forscher an, dass die Halbwertszeit exponentialverteilt ist mit Parameter $\frac{1}{\lambda}$, für $\lambda > 0$, d.h. $X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{\lambda}) =: \mathbb{P}_\lambda$. Die Forscher wollen basierend auf ihrer Messung nachweisen, dass die wahre Halbwertszeit größer als die bisher vermutete ist.

(i) Sei zunächst $\lambda_1 > \lambda_0$ fest gewählt. Formulieren Sie den Neyman-Pearson-Test $\phi^* : \mathbb{R} \to \{H_0, H_A\}$ aus Satz 6.18 für die $\mathbb{P}_\lambda$-Verteilung zu den Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A : \lambda = \lambda_1$$

zum Niveau $\alpha \in (0,1)$. Vereinfachen Sie dann diesen Test mittels der Technik der monotonen Dichte-Quotienten.

(ii) Begründen Sie, warum ϕ^* aus (i) auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A' : \lambda > \lambda_0$$

ist.

(iii) Die Forscher wollen den peinlichen Fehler, falsch zu liegen, nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% begehen. Werden sie sich auf Basis ihrer Beobachtung X und dem Test ϕ^* dazu entscheiden, ihre Ergebnisse zu publizieren?

(4 Punkte)

Beweis. (i) Wir untersuchen Verteilungen $\mathbb{P}_\lambda = \mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda})$ mit Dichten $f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{1}{\lambda}x)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$. Laut dem Neyman-Pearson-Lemma 6.18 lautet der Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Hypothesen $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H_A : \lambda = \lambda_1$

$$\phi^* : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1, & L(x) \geq c^* \\ 0, & L(x) < c^* \end{cases},$$

wobei $L(x) := \frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)}$ der Likelihood-Quotient ist und $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = 1) = \alpha$ gelten muss. Hier haben wir für $x \geq 0$, dass

$$L(x) = \frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \cdot \exp\left(x \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\right).$$

Da $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ und $\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} > 0$, ist der Likelihoodquotient $L(x)$ monoton wachsend in x und der Test vereinfacht sich zu

$$\phi^* : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \geq c^* \\ 0, & x < c^* \end{cases}, \tag{2}$$

mit

$$\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = 1) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(\{x \geq c^*\}) = 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}(-\infty, c^*]) = 1 - F_{\lambda_0}(c^*),$$

wobei $F_\lambda(x) = \left(1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$ die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{\lambda}$ ist. Da für $c^* \leq 0$ offensichtlich keine Lösung existiert, nehmen wir $c^* > 0$ an und finden damit die Lösung

$$\alpha = e^{-\frac{1}{\lambda_0}c^*} \Leftrightarrow c^* = -\lambda_0 \cdot \ln(\alpha). \tag{3}$$

(ii) Wie man an (2) und (3) sieht, hängt der gesamte Test ϕ^* nicht von der konkreten Wahl von $\lambda_1 > \lambda_0$ ab. Für jedes $\lambda_1 > \lambda_0$ und Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A : \lambda = \lambda_1$$

erhalten wir also denselben Test ϕ^* mit der Optimalitätsaussage: ϕ^* minimiert den Fehler 2. Art $\mathbb{P}_{\lambda_1}(\phi = 0)$ unter allen Tests ϕ mit Fehler 1. Art $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = 1)$. Damit ist ϕ^* gleichmäßig bester Test für die Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A' : \lambda > \lambda_0.$$

(iii) Mit der Bemerkung über den peinlichen Fehler wird ein Niveau $\alpha = 0.05$ für den Fehler 1. Art vorgegeben. Die Hypothesen wurden in der Aufgabenstellung (i) schon richtig definiert, damit der peinliche Fehler wirklich dem Fehler 1. Art entspricht. Wir erhalten damit

$$c^* = -\lambda_0 \cdot \ln(\alpha) \approx 15.8.$$

Das bedeutet, der Test ϕ^* liefert für die Beobachtung $X = 13$ trotzdem $\phi^*(X) = 0$. Das bedeutet, der Test verwirft die Nullhypothese $\lambda = \lambda_0$ nicht. Die Forscher können also auf Basis des Tests ϕ^* und ihrer Beobachtung X zum Niveau $\alpha = 0.05$ nicht nachweisen, dass die Halbwertszeit tatsächlich größer ist. Sie sollten ihre Ergebnisse besser nicht publizieren.

$\square$