Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte existieren.

(i) Es gelte $X \geq 0$, d.h. für $\omega \in \Omega$ gilt $X(\omega) \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(ii) Es gelte $X \geq Y$. Folgern Sie, dass $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$.

(iii) Falls $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ so gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[(X-a)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = \mathbb{E}[X]$.

(1+1+2 Punkte)

Beweis. (i) Man benutze die Bemerkung über Erwartungswerte nach Definiton 7.1 aus dem Skript. Wegen $X(\omega) \geq 0$ für jedes $\omega \in \Omega$ ist

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geq \sum_{\omega \in \Omega} 0 \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = 0.$$

(ii) $X \geq Y$ impliziert $Y - X \geq 0$. Es folgt mit (i) und Satz 7.8

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}[Y - X] \\ &= \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] \end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X-a)^2] &= \mathbb{E}\big[((X - \mathbb{E}[X]) + (\mathbb{E}[X] - a))^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2 + 2(X - \mathbb{E}[X])\underbrace{(\mathbb{E}[X] - a)}_{\in \mathbb{R}} + (\mathbb{E}[X] - a)^2\big] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] + 2(\mathbb{E}X - a)\underbrace{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]}_{=\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0} + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X] - a)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] + \underbrace{(\mathbb{E}[X] - a)^2}_{\geq 0} \\ &\geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt, da für $x, y \in \mathbb{R}$ bekanntermaßen $(x-y)^2 = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

□

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

(ii) Berechnen Sie unter Verwendung der Resultats aus (i) den Erwartungswert im Falle, dass $X \sim \mathcal{G}(p)$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0,1)$ ist.

(iii) Falls X nichtnegativ und stetig verteilt ist mit Verteilungsfunktion F_X, so kann man mit ähnlichen Mitteln wie in (i) zeigen, dass

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Berechnen Sie mittels (1) den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(2+1+1 Punkte)

Beweis. (i) Es gilt nach Vorlesung für eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X = n) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{1}_{\{k \leq n\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{1}_{\{k \leq n\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).
\end{aligned}$$

(ii) Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{G}(p)$ gilt für $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq n-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) = p \cdot \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k \\
&= p \cdot \frac{1 - (1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{n-1},
\end{aligned}$$

d.h. $\mathbb{P}(X \geq n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n-1) = (1-p)^{n-1}$.
Hier wurde die Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe genutzt: Für $q \in (0,1)$ und $I \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{I} q^i = \frac{1 - q^{I+1}}{1-q}.$$

Diese is bekannt oder leicht nachzuweisen mit $q \cdot \sum_{i=0}^{I} q^i = \sum_{i=0}^{I+1} q^i - 1$.
Damit haben wir

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

(iii) Die Verteilungsfunktion von $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ lautet

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \Big]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Extra für die Übung:
Die Dichte von X lautet $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$. Der Erwartungswert berechnet sich durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \Big[-xe^{-\lambda x} \Big]_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= 0 + \Big[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (a) Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0, 0)$ und Radius 1. Nun wird ein Punkt Z auf der oberen Hälfte der Kreislinie zufällig ausgewählt, wobei jeder Punkt auf der oberen Hälfte der Kreislinie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in Frage kommt. Sei A die Fläche des Dreiecks, das von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und Z gebildet wird. Berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz von A.

(b) Auf einem Tisch liegen 10 Euro. In jedem Spielzug werfen Sie eine Münze mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ für 'Kopf'. Werfen Sie 'Kopf', erhalten Sie den gesamten Geldbetrag auf dem Tisch und das Spiel ist beendet. Werfen Sie 'Zahl', wird der Geldbetrag auf dem Tisch halbiert.
Sei X der Geldbetrag, den Sie bei diesem Spiel erhalten. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. Wie groß sollte p sein, damit Sie im Durchschnitt bei diesem Spiel mindestens 5 Euro gewinnen?

(c) In einem Spiel ziehen Sie ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n von 1 bis n durchnummerierten Kugeln. Das Spiel ist beendet, sobald ein gezogener Wert kleiner ist als der zuvor gezogene Wert. Vor jedem Zug erhalten Sie einen Euro. Wie viel Euro werden Sie im Mittel erhalten?
Hinweis: Definieren Sie für $k = 1, ..., n$ Zufallsvariablen

$$X_k := \begin{cases} 1, & \textit{Sie dürfen den } k\textit{-ten Zug durchführen,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und stellen Sie den Gewinn eines Spiels durch die X_k dar.

(2+2+2 Punkte)

Beweis. (a) Wir stellen Z dar als

$$Z = (\cos(\phi), \sin(\phi))$$

mit $\phi \sim U[0, \pi]$. Denn wenn Z gleichverteilt auf dem oberen Halbkreis ist, so ist also der Winkel des Punktes gleichverteilt auf $[0, \pi]$. Die Dichte ergibt sich als $f_\phi(\phi) =$

$\frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{[0,\pi]}(\phi)$. Die Strecke zwischen $(0,0)$ und $(0,1)$ hat Länge 1. Das Lot von Z auf ebendiese Strecke ist entsprechend $|\cos(\phi)|$. Damit beträgt die Fläche des Dreiecks

$$A(\phi) = \frac{1}{2}|\cos(\phi)|.$$

Für den Erwartungswert erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A(\phi)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[|\cos(\phi)|] \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\cos(\phi)| \cdot f_\phi(\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\cos(\phi)|\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\phi)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir wegen $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1 \Rightarrow \cos^2(\phi) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\phi))$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A(\phi)^2] &= \frac{1}{4}\mathbb{E}[\cos^2(\phi)] = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \cos^2(\phi) \cdot f_\phi(\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \cos^2(\phi)\mathrm{d}\phi \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2\phi))\mathrm{d}\phi = \frac{1}{4\pi}\Big[\phi + \frac{1}{2}\sin(2\phi)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Var}(A(\phi)) = \mathbb{E}[A(\phi)^2] - \mathbb{E}[A(\phi)]^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}.$$

(b) Der gewonnene Geldbetrag hat die Darstellung $X = \left(\frac{1}{2}\right)^{Y-1} \cdot 10$, wobei $Y \sim \mathcal{G}(p)$ geometrisch verteilt ist mit Parameter $p \in (0,1)$ mit der Dichte

$$\mathbb{P}(Y = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Da Y die Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg zählt, ist $Y = 1$, selbst wenn wir im ersten Zug bereits 'Kopf' werfen. In diesem Fall würden wir aber die gesamten 10 Euro bekommen. Daher muss im Exponenten von $\frac{1}{2}$ in der Darstellung von X ein '$Y-1$' anstatt 'Y' stehen.
Für den Erwartungswert von X erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 10 \cdot \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{Y-1}\right], \\
\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{Y-1}\right] &= \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \mathbb{P}(Y=k) = p \cdot \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1-p}{2}\right)^{k-1} \\
&= p \cdot \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1-p}{2}\right)^k = p \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{2}\right)} = \frac{2p}{1+p},
\end{aligned}$$

also

$$\mathbb{E}[X] = \frac{20p}{1+p}.$$

Im Durchschnitt mindestens 5 Euro gewinnen, bedeutet, dass $\mathbb{E}[X] \geq 5$. Das wird erreicht durch

$$\mathbb{E}[X] \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20p}{1+p} \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 20p \geq 5 + 5p \quad \Leftrightarrow \quad p \geq \frac{1}{3}.$$

(c) X sei die Zufallsvariable, die den Gewinn in Euro modelliert. Es gilt

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

und demzufolge

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1).$$

Seien $Y_1, ..., Y_n$ die Nummern der gezogenen Kugeln. Da zufällig aus der Urne gezogen wird, ist jede Verteilung der Nummern $1, ..., n$ auf $Y_1, ..., Y_n$ gleichwahrscheinlich. Für $k = 1, ..., n$ lässt sich die Zufallsvariable X_k nun auch darstellen als

$$X_k = \begin{cases} 1, & Y_1 < Y_2 < ... < Y_{k-1}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir brauchen die Summe hier nur bis Y_{k-1}, da der k-te Zug ja schon durchgeführt werden darf, wenn bis zum $(k-1)$-ten Zug alles aufsteigend war.
Es gilt also

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(Y_1 < ... < Y_{k-1}).$$

Aufgrund der entsprechenden Eigenschaften für $Y_1, ..., Y_n$ sind auch alle möglichen Verteilungen der Nummern auf die $Y_1, ..., Y_{k-1}$ gleichwahrscheinlich. Da für die Berechnung der obigen Wahrscheinlichkeit nur die Reihenfolge und nicht die konkreten Werte der Y_i wichtig sind, können wir uns auf eine vereinfachte Berechnung zurückziehen. Es gibt insgesamt $(k-1)!$ Möglichkeiten für die Anordnung der $Y_1, ..., Y_{k-1}$. Nur eine einzige davon aber gewährleistet $Y_1 < ... < Y_{k-1}$. Da alle Anordnungen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, gilt

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(Y_1 < ... < Y_{k-1}) = \frac{1}{(k-1)!}.$$

Damit gilt insgesamt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \to e$$

für $n \to \infty$.

$\square$

Aufgabe 4

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Gruppe von n (perfekten) Jäger:innen schießt auf m Enten, wobei sich jede:r Jäger:in sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jäger:innen auswählt. Insbesondere kann eine Ente also von mehreren Jäger:innen ausgewählt werden. Sei X die Anzahl der bei diesem Massaker überlebenden Enten.

(a) Berechnen Sie Erwartungswert von X.
Hinweis: Nummerieren Sie die Enten von 1 bis m und definieren Sie das Ereignis $A_i :=$ "Die i-te Ente überlebt". Drücken Sie X durch die Zufallsvariablen $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ aus.

(b) Berechnen Sie die Varianz von X.

(c) Sei nun $m = n = 50$. Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und die Ergebnisse aus (a), um ein Intervall $[m_1, m_2]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, anzugeben, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der überlebenden Enten liegt.
Anmerkung: Solch ein Intervall wird auch 90%-Konfidenzintervall genannt.

(2+2+2 Punkte)

Beweis. (a) Wir nutzen die Notationen aus dem Hinweis. Dann gilt

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i,$$

und die erwartete Anzahl an überlebenden Enten ist:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{m} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i).$$

Um den Erwartungswert zu berechnen, müssen wir uns also Gedanken über die Wahrscheinlichkeit von A_i machen. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(i\text{-te Ente überlebt}) \\
&= \mathbb{P}(\text{Kein:e Jäger:in schießt auf Ente } i) \\
&= \mathbb{P}(\text{Jäger:in 1 schießt nicht auf Ente } i, \text{ ..., Jäger:in } n \text{ schießt nicht auf Ente } i) \\
&= \mathbb{P}(\text{Jäger:in 1 schießt nicht auf Ente } i) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\text{Jäger:in } n \text{ schießt nicht auf Ente } i),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung gilt, da die Jäger unabhängig voneinander schießen.
Die Jäger:innen wählen jede Ente mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Ziel aus. Daher ist

$$\mathbb{P}(\text{Jäger:in } j \text{ schießt nicht auf Ente } i) = \frac{m-1}{m}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n,$$

und folglich für die erwartete Anzahl an überlebenden Enten

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n.$$

(b) Für die Varianz nutzen wir die Formel $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Da $\mathbb{E}[X]$ bereits bekannt ist, ist nur noch $\mathbb{E}[X^2]$ zu berechnen. Es gilt wegen der Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{m} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{m} \mathbb{E}[X_i X_j].$$

Beachte, dass $\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n$ (s.o.).
Für $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ berechnen wir wie oben:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\
= \;& \mathbb{P}(i\text{-te Ente und } j\text{-te Ente überlebt}) \\
= \;& \mathbb{P}(\text{Kein:e Jäger:in schießt auf Enten } i, j) \\
= \;& \mathbb{P}(\text{Jäger:in 1 schießt nicht auf Enten } i, j, \text{ ..., Jäger:in } n \text{ schießt nicht auf Enten } i, j) \\
= \;& \mathbb{P}(\text{Jäger:in 1 schießt nicht auf Enten } i, j) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\text{Jäger:in } n \text{ schießt nicht auf Enten } i, j) \\
= \;& \left(\frac{m-2}{m}\right)^n.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{E}[X^2] = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n + m \cdot (m-1) \cdot \left(\frac{m-2}{m}\right)^n$$

und damit

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n + m \cdot (m-1) \cdot \left(\frac{m-2}{m}\right)^n - \left(m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right)^2.$$

(c) Wir erinnern uns an die Tschebyscheff-Ungleichung lautet::

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Durch das Bilden des Gegenereignisses erhalten wir

$$\mathbb{P}\Big(X \in (\mathbb{E}[X] - \varepsilon, \mathbb{E}[X] + \varepsilon)\Big) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Diese Ungleichung ist wie folgt zu interpretieren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ liegt X, die Anzahl der überlebenden Enten, im Intervall $(\mathbb{E}[X] - \varepsilon, \mathbb{E}[X] + \varepsilon)$. Wir wollen erreichen, dass

$$1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \geq 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 0.1 \geq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq \sqrt{10\mathrm{Var}(X)}. \tag{2}$$

Für $n = m = 50$ gilt

$$\mathbb{E}[X] \approx 18.21, \qquad \mathrm{Var}(X) \approx 4.88$$

Damit müssen wir gemäß (2) also $\varepsilon \geq 6.99$ wählen. Wir erhalten das Intervall

$$(\mathbb{E}[X] - \varepsilon, \mathbb{E}[X] + \varepsilon) = (11.22, 25.20).$$

Entsprechend besitzt das Intervall $[11, 26]$ die gewünschten Eigenschaften aus der Aufgabenstellung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% werden also zwischen 11 und 26 Enten überleben.
Anmerkung: Tatsächlich ist hier sogar das Intervall $[12, 25]$ *ausreichend, weil* $X \in (11.22, 25.20)$ *im Falle von* X *diskret bedeutet, dass* $X \in \{12, ..., 25\}$*. Würde man aber* X *mit einer stetigen Verteilung modellieren, müsste man tatsächlich* $[11, 26]$ *wählen.*

$\square$