Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

# Lösungsskizzen zu Übungsblatt 9

**Aufgabe 1**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, Y_n, X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass aus $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ folgt, dass

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen $X$ konvergiert, falls

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$$

für $n \to \infty$.

(iii) Zeigen Sie folgende Aussage. Der stochastische Grenzwert und der Grenzwert im quadratischen Mittel einer Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ist mit Wahrscheinlichkeit 1 eindeutig.

(iv) Beweisen sie, dass für zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ gilt, falls eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $X_n \xrightarrow{(2)} Y$.

**(1+1+2+1 Punkte)**

*Beweis.* (i) Sei $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon)\\ &\leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2})\\ &\leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) \to 0.\end{aligned}$$

(ii) Hier nutzen wir die Markov-Ungleichung (Aufgabe 2 (i)) mit $|X_n - X| \geq 0$ und dem monoton wachsenden $f : [0, \infty) \supset \text{Bild}(|X_n - X|) \to [0, \infty), f(x) = x$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|}{\varepsilon} \to 0,$$

also $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

(iii) Sei $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X-Y| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n-X|+|X_n-Y| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n-X| \geq \varepsilon/2)+\mathbb{P}(|X_n-Y| \geq \varepsilon/2) \to 0,$$

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{P}(|X - Y| \geq \varepsilon) = 0$. Angewandt auf die Folge $\varepsilon = 1/n$, folgt $\mathbb{P}(|X - Y| > 0) = 0$ bzw. $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.
Sei $X_n \xrightarrow{(2)} X$, $X_n \xrightarrow{(2)} Y$. Dann gilt wegen $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$$\mathbb{E}[|X - Y|^2] = \mathbb{E}[(|X_n - X| + |X_n - Y|)^2] \leq 2\Big(\mathbb{E}[|X_n - X|^2] + \mathbb{E}[|X_n - Y|^2]\Big) \to 0,$$

d.h. $\mathbb{E}[|X-Y|^2] = 0$. Die Tschebyscheff-Ungleichung liefert für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X-Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X-Y|^2]}{\varepsilon^2} = 0,$$

und nun folgt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ wie bei der stochastischen Konvergenz.

(iv) Aus $X_n \overset{(2)}{\to} Y$ folgt nach Proposition 10.5. der Vorlesung bereits $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} Y$. Wir haben nun also $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ und $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} Y$. Nach Aufgabe (iii) folgt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

$\square$

**Aufgabe 2**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Zeigen Sie die so genannte *Markov-Ungleichung*:
Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable, $f : \text{Bild}(X) \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion und $\varepsilon > 0$ mit $f(\varepsilon) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(\varepsilon)}.$$

*Hinweis: Schreiben Sie* $\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}]$ *und fügen Sie dann* $1 = \frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}$ *an geeigneter Stelle ein.*

(ii) Folgern Sie aus (i) die Tschebyscheff-Ungleichung aus der Vorlesung.

(iii) Seien $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $0 \leq X_i \leq 1$ für alle $i = 1, ..., n$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i]) \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$

*Hinweis: Nutzen Sie (i) mit* $f(x) = \exp(z \cdot x)$, *wobei* $z > 0$ *noch geeignet zu bestimmen ist. Definieren Sie* $Y_i := X_i - \mathbb{E}[X_i]$ *und verwenden Sie die Konvexität von* $\exp$, *um* $\exp(zY_i) \leq \left(\frac{1-Y_i}{2}\right)\exp(-z) + \left(\frac{Y_i+1}{2}\right)\exp(z)$ *zu zeigen. Verwenden Sie* $\exp(z) + \exp(-z) \leq 2\exp(\frac{z^2}{2})$, *um* $\mathbb{E}[\exp(zY_i)]$ *nach oben abzuschätzen.*

(iv) Seien nun $Y_1, ..., Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}$ die empirische Verteilungsfunktion. Zeigen Sie mittels (iii), dass

$$\mathbb{P}\Big(|\hat{F}_n(t) - F(t)| \geq \varepsilon\Big) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot n\right).$$

**(1+1+2+2 Punkte)**

*Beweis.* (i) Es gilt für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}] = \mathbb{E}\left[\frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\frac{f(X)}{f(\varepsilon)}\mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(\varepsilon)},
\end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung benutzt haben, dass $f$ monoton ist.

(ii) Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $X := |Y - \mathbb{E}[Y]|$. Weiter ist $f : [0,\infty) \to [0,\infty), f(x) = x^2$ monoton wachsend. Aus (i) folgt

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

(iii) Sei $z := \frac{\varepsilon}{n}$. Unter Nutzung von (i) mit $f : \mathbb{R} \to (0,\infty), f(x) = \exp(z \cdot x)$ und der Definition $Y_i := X_i - \mathbb{E}[X_i]$, die $-1 \leq Y_i \leq 1$ erfüllt, erhalten wir

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i > \varepsilon\right) \leq \exp\left(-z\varepsilon\right) \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(z \cdot \sum_{i=1}^n Y_i\right)\right] = \exp\left(-z\varepsilon\right) \cdot \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[\exp\left(z \cdot Y_i\right)\Big].$$

Nun gilt aufgrund der Konvexität von $\exp(\cdot)$

$$\begin{aligned}\exp(z \cdot Y_i) &= \exp\left((-z) \cdot \left(\frac{1 - Y_i}{2}\right) + z \cdot \left(\frac{Y_i + 1}{2}\right)\right) \\ &\leq \left(\frac{1 - Y_i}{2}\right) \cdot \exp(-z) + \left(\frac{Y_i + 1}{2}\right) \cdot \exp(z),\end{aligned}$$

so dass

$$\mathbb{E}[\exp(z \cdot Y_i)] \leq \frac{1}{2}\Big(\exp(z) + \exp(-z)\Big).$$

Mit der Ungleichung $\frac{1}{2}\Big(\exp(z) + \exp(-z)\Big) \leq \exp\left(\frac{z^2}{2}\right)$ aus dem Hinweis folgt

$$\mathbb{E}[\exp(z \cdot Y_i)] \leq \exp\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

Insgesamt also

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i > \varepsilon\right) \leq \exp(-z\varepsilon) \cdot \exp\left(n \cdot \frac{z^2}{2}\right) \overset{z=\frac{\varepsilon}{n}}{=} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$

(iv) Weil die $Y_i, i = 1, ..., n$ unabhängig sind, sind auch die $X_i := \mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}, i = 1, \ldots, n$ unabhängig. Es gilt wegen $F(t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}]$

$$n \cdot \Big(\hat{F}_n(t) - F(t)\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}]\Big) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]),$$

und wegen $0 \leq Y_i = \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}} \leq 1$ ist (iii) daher direkt anwendbar und liefert

$$\mathbb{P}(\hat{F}_n(t) - F(t) > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) > n \cdot \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot n\right). \qquad (1)$$

Analog gilt mit $X_i := 1 - \mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}$, dass

$$n \cdot \Big(F(t) - \hat{F}_n(t)\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}]\Big) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i),$$

das bedeutet wir erhalten wie oben

$$\mathbb{P}(\hat{F}(t) - \hat{F}_n(t) > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot n\right). \qquad (2)$$

Die Ungleichungen (1) und (2) ergeben zusammen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\hat{F}_n(t) - F(t)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(\hat{F}_n(t) - F(t) > \varepsilon \text{ oder } -(\hat{F}_n(t) - F(t)) > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(\hat{F}_n(t) - F(t) > \varepsilon) + \mathbb{P}(F(t) - \hat{F}_n(t) > \varepsilon) \\ &\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot n\right).\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 3**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(i) Sei $U \sim \mathcal{R}[0,1]$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $X_n \xrightarrow{(2)} 0$ gilt.

(ii) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann folgt: $X_n \xrightarrow{(2)} X$.
*Hinweis: Nutzen Sie $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ und ohne Beweis die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: Sind $Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, so gilt für $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$.*

(iii) Zeigen Sie, dass die $X_n, X$ aus (i) die Bedingungen aus (ii) nicht erfüllen.

**(1+2+1 Punkte)**

*Beweis.* (i) Sei $\varepsilon > 0$. Für $n$ groß genug ist $\sqrt{n} > \varepsilon$. Dann haben wir

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U) > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(U \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Dies zeigt $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Weiter haben wir mit $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, dass

$$\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = n \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)] = n \cdot \mathbb{P}\left(U \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\to 0,$$

d.h. $X_n \xrightarrow{(2)} X$ gilt nicht.

(ii) Wir benutzen die Hölder-Ungleichung mit $p = \frac{2+\alpha}{2}$ und $q = \frac{2+\alpha}{\alpha}$, sowie dass $(X_n - X)^2 \leq 2(X_n^2 + X^2)$. Es folgt

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(X_n - X)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}] \\ &\leq 2\mathbb{E}[X_n^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] + 2\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}] \\ &\leq 2\mathbb{E}[|X_n|^{2p}]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^q_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]^{1/q} + 2\mathbb{E}[|X|^{2p}]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^q_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]^{1/q} + \mathbb{E}[\varepsilon^2 \cdot 1] \\ &\leq 2\left(\mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}]^{\frac{2}{2+\alpha}} + \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}]^{\frac{2}{2+\alpha}}\right) \cdot \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} + \varepsilon^2\end{aligned}$$

Da $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$ und $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] \leq \varepsilon^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt mit $\varepsilon \searrow 0$, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

(iii) Da $X = 0$, ist offensichtlich $\mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] = 0 < \infty$ für alle $\alpha > 0$. Allerdings gilt für alle $\alpha > 0$, dass

$$\mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}] = n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)\right] = n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n} = n^{\frac{\alpha}{2}},$$

sodass $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}] = \infty$. Das bedeutet, die Voraussetzungen von (ii) sind nicht erfüllt.

$\square$

**Aufgabe 4**

Seien $(X, Y)$ die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor $(X, Y)$ habe die Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_E(x, y)$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie die Marginalverteilungen von $X$ und $Y$.

(ii) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$ sowie $\mathrm{Kov}(X, Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$.
*Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten* $(x, y) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ *bzw.* $x = \sin(\phi)$ *für die 2- bzw. 1-dimensionalen Integrale.*

(iii) Zeigen Sie, dass $X$ und $Y$ nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

**(1+3+1 Punkte)**

*Beweis.* (i) Es ist

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x, y) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}}(x, y) \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}}(x), \end{aligned}$$

also

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}y \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}}(x),$$

und da $f_{X,Y}(x, y)$ symmetrisch in $x$ und $y$ ist, folgt analog, dass

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - y^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq y\leq 1\}}(y).$$

(ii) Berechne zunächst $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$.

$$= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}x = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

da der Integrand gerade ist. Mit der Substitution $x = \sin(u) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos(u) \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos(u)\mathrm{d}u$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{4}{\pi} \cdot \int_{u^{-1}(0)=0}^{u^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) \cdot \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{2\sin(u)\cos(u)}_{=\sin(2u)})^2 \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4u)\right) \mathrm{d}u \quad = \quad \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

mit $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Damit ist

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{4} - 0^2 = \frac{1}{4}.$$

Da $f_X = f_Y$, folgt $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}$. Wir transformieren zu Polarkoordinatendarstellung:

$$\begin{aligned}
\psi(r,\phi) &= \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
\psi^{-1}(E) &= \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, \phi \in [0,2\pi]\}
\end{aligned}$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}(X,Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}} \frac{1}{\pi} xy\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cdot (r\cos(\phi)) \cdot (r\sin(\phi)) \cdot r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 r^3 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(2\phi)\mathrm{d}\phi}_{=0} \mathrm{d}r = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Wegen $\mathrm{Kov}(X,Y) = 0$, sind $X$ und $Y$ unkorreliert. $X$ und $Y$ sind nicht unabhängig, da

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \\
&\neq \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq y\leq 1\}}\right) \\
&= f_X(x) \cdot f_Y(y).
\end{aligned}$$

Dass linke und rechte Seite sich nicht nur auf einer $\mathbb{R}^2$-Nullmenge unterscheiden, sieht man daran, dass $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ in der Menge $[0,1]^2 \setminus E$ positive Werte annimmt, aber $f_{X,Y}(x,y)$ dort überall Null ist.

$\square$