Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir definieren den Zufallsvektor $X = (X_1, ..., X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\Big),$$

wobei $x = (x_1, ..., x_d)' \in \mathbb{R}^d$, ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^d$.

(ii) $X_1, ..., X_d$ sind genau dann unabhängig und normalverteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $i = 1, ..., d$, wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2)$.

(iii) Für alle $i, j = 1, ..., d$ gilt $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ und $\mathrm{Kov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis die unten stehende Regel $(*)$. Zeigen Sie die Aussage zuerst für $\Sigma = I_{d\times d}$. Betrachten Sie dann $\mathrm{Kov}(Y_i, Y_j)$ mit $Y := \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$ für $i, j = 1, ..., d$ und nutzen Sie die Bilinearität der Kovarianz, um auf $\mathrm{Kov}(X_i, X_j)$ für $i, j = 1, ..., d$ zu schließen.

(iv) Beweisen Sie die unten stehende Regel $(*)$ im zwei-dimensionalen Fall.

Regel $(*)$: Sei $X = (X_1, ..., X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit. Sei ferner $p \le d$, $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ mit Rang$(A) = p$, und $b \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $AX + b \sim \mathcal{N}(A\mu + b, A\Sigma A')$.

(1+2+2+2) Punkte)

Beweis. (i) Sei $x = (x_1, ..., x_d)' \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\Big)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_d \\
\overset{y=x-\mu}{=}\ &\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{1}{2}y'\Sigma^{-1}y\Big)\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}y_d \\
\overset{z:=\Sigma^{-1/2}y}{=}\ &\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \det(\Sigma)^{1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}z'z\Big)\mathrm{d}z_1...\mathrm{d}z_d \\
=\ &\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \det(\Sigma)^{1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n z_i^2\Big)\mathrm{d}z_1...\mathrm{d}z_d \\
=\ &\det(\Sigma)^{1/2}\prod_{i=1}^n \sqrt{2\pi} = (2\pi)^{d/2}\det(\Sigma)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

(ii) Sind $X_1, ..., X_d$ unabhängig mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, so folgt für die gemeinsame Dichte von $X = (X_1, ..., X_d)$ mit $x = (x_1, ..., x_d)$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \left(\prod_{i=1}^d \sigma_i^2 \right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \end{aligned}$$

Nun ist mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2)$ offensichtlich $\det(\Sigma) = \prod_{i=1}^d \sigma_i^2$ und

$$(x - \mu)'\Sigma^{-1}(x - \mu) = (x - \mu)'\text{diag}(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_d^{-2})(x - \mu) = \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2},$$

insgesamt also

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)'\Sigma^{-1}(x - \mu) \right),$$

die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$-Verteilung.
Ist nun umgekehrt $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2)$, so folgt mittels (iii) für $i = 1, ..., d$,

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2),$$

d.h.

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right).$$

Mit denselben Umformungen wie oben erhalten wir nun

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)'\Sigma^{-1}(x - \mu) \right) = \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x).$$

Damit sind $X_1, ..., X_d$ stochastisch unabhängig.

(iii) Wir wenden die Regel $(*)$ mit $A = e_i'$, dem transponierten i-ten Einheitsvektor $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^d$, in $\mathbb{R}^d$ an. Es folgt

$$X_i = AX \sim N(A\mu, A\Sigma A').$$

Hier ist $A\mu = e_i'\mu = \mu_i$, und $A\Sigma A' = e_i' A e_i = \Sigma_{ii}$. Damit folgt also

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{ii}).$$

Aus den bereits bekannten Eigenschaften einer Normalverteilung schließen wir sofort $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$.

Weiterhin sei zunächst $\Sigma = I_{d\times d}$. Laut (ii) sind $X_1, ..., X_d$ dann stochastisch unabhängig mit $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, $i = 1, ..., d$, und es folgt

$$\text{Kov}(X_i, X_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

also insbesondere $\text{Kov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$.
Sei nun Σ beliebig. Definiere $Y := \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$. Dann gilt nach der Regel $(*)$

$$Y = \Sigma^{-1/2}X - \Sigma^{-1/2}\mu \sim \mathcal{N}(\Sigma^{-1/2}\mu - \Sigma^{-1/2}\mu, \Sigma^{-1/2}\Sigma\Sigma^{-1/2}) = \mathcal{N}(0, I_{d\times d}).$$

Es folgt für $i, j = 1, ..., d$ gerade

$$\mathrm{Kov}(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

Wegen $X = \Sigma^{1/2}Y + \mu$ erhalten wir für $i, j = 1, ..., d$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}(X_i, X_j) &= \mathrm{Kov}((\Sigma^{1/2}Y)_i + \mu_i, (\Sigma^{1/2}Y)_j + \mu_j) = \mathrm{Kov}((\Sigma^{1/2}Y)_i, (\Sigma^{1/2}Y)_j) \\
&= \mathrm{Kov}\left(\sum_{k=1}^{d}(\Sigma^{1/2})_{ik}Y_k, \sum_{l=1}^{d}(\Sigma^{1/2})_{jl}Y_l\right) = \sum_{k,l=1}^{d}(\Sigma^{1/2})_{ik}(\Sigma^{1/2})_{jl}\underbrace{\mathrm{Kov}(Y_k, Y_l)}_{=\delta_{kl}} \\
&= \sum_{k=1}^{d}(\Sigma^{1/2})_{ik}(\Sigma^{1/2})_{jk} \overset{\Sigma \text{ symm.}}{=} (\Sigma^{1/2} \cdot \Sigma^{1/2})_{ij} = \Sigma_{ij}.
\end{aligned}$$

Beachte $\mathrm{Kov}(c, X) = 0$ für Konstanten c.

(iv) Wir setzen $B := \Sigma^{1/2} = PD^{1/2}P'$ und $B = B'$ (möglich durch Diagonalisierbarkeit).
Wir definieren $U := B^{-1}(X - \mu)$ und es gilt $U \sim \mathcal{N}(0, I)$, $I := I_{2\times 2}$. Eine einfache Rechnung über die Dichten von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ und $U \sim \mathcal{N}(0, I)$ zeigt, dass $BU \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, wobei

$$f_{BU}(x) = \frac{1}{\det(B)} f_U(B^{-1}x)$$

für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Das genaue Argument lautet hierbei: Für eine Menge $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq m_1, x_2 \leq m_2\}$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^d$, *und* $MB^{-1} := \{y \in \mathbb{R}^2 : By \in M\}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(BU \in M) = \mathbb{P}(U \in MB^{-1}) &= \int\int_{MB^{-1}} f_U(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\
&= \frac{1}{\det(B)} \int\int_M f_U(B^{-1}x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Wir zeigen die Aussage für den Fall $\mu = 0$. Der Fall $\mu \neq 0$ folgt mit analoger Rechnung.

Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f_{AX}(x) = f_{ABU}(x) &= \frac{1}{\det(A)\det(B)} f_U(B^{-1}A^{-1}x) \\
&= \frac{1}{2\pi\det(A)\det(B)} \exp\left(-\frac{(B^{-1}A^{-1}x)'(B^{-1}A^{-1}x)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\det(A)\det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x'(A\Sigma A')^{-1}x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ist $A \in M(1 \times 2, \mathbb{R})$, d.h. $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, also $AX = a_1X_1 + a_2X_2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(AX) &= a_1^2\mathrm{Var}(X_1) + a_2^2\mathrm{Var}(X_2) + 2a_1a_2\mathrm{Kov}(X_1, X_2) \\
&= a_1^2\Sigma_{11} + a_2^2\Sigma_{22} + 2a_1a_2\Sigma_{12} = A\Sigma A'.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_{1i}X_{1j}] < \infty$ für $i, j = 1, ..., n$, wobei $X_1 = (X_{11}, ..., X_{1n})$. Zeigen Sie, dass der folgende Schätzer für die Kovarianzmatrix Σ,

$$\hat{\Sigma}_{ij} := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_{ki} - X_{\cdot i})(X_{kj} - X_{\cdot j}), \qquad X_{\cdot i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ki}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für Σ ist, d.h. dass $\mathbb{E}[\hat{\Sigma}_{ij}] = \Sigma_{ij}$ gilt.

(2 Punkte)

Beweis. Wir betrachten den Fall $\mu = 0$; sonst $X - \mu$ für $\mu \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{ij} &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_{ki}X_{kj} - \frac{n}{n-1}X_{\cdot i}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{kj} - \frac{n}{n-1}X_{\cdot j}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ki} \\
&\quad + \frac{n}{n-1}X_{\cdot i}X_{\cdot j} \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_{ki}X_{kj} - \frac{n}{n-1}X_{\cdot i}X_{\cdot j}.
\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\Sigma}_{ij}] &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_{ki}X_{kj}\right] - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left[X_{\cdot i}X_{\cdot j}\right] \\
&= \frac{1}{n-1}(n\Sigma_{ij} - n\frac{1}{n^2}n\Sigma_{ij}) = \Sigma_{ij},
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{E}\left[X_{\cdot i}X_{\cdot j}\right] = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{l=1}^{n}\mathbb{E}[X_{li}X_{lj}] + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n}\mathbb{E}[X_{li}X_{kj}]\right] = \frac{n}{n^2}\Sigma_{i,j}.$$

$\square$

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\sigma > 0$ sowie $\theta \in (-1, 1)$. Wir definieren $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $i = 0, ..., n$. Weiter seien $X_1, ..., X_n$ gegeben durch

$$X_t := \varepsilon_t + \theta \cdot \varepsilon_{t-1} \qquad (t = 1, ..., n).$$

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathrm{Kov}(X_t, X_{t-k})$ und $\rho(X_t, X_{t-k})$ für $t = 1, ..., n$ und $k = 0, ..., t-1$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ multivariat normalverteilt ist mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2\Big((1 + \theta^2) \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=0\}} + \theta \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=1\}}\Big) \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Regel $(*)$ aus Aufgabe 1.

(iii) Zeigen Sie, dass $\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1^2]$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und zur Berechnung der auftretenden Terme folgende Aussage: „Für $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ gilt, dass $\mathbb{E}[X_iX_jX_kX_l] = \Sigma_{ij}\Sigma_{kl} + \Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk}$.“

(iv) Analog zu (iii) kann gezeigt werden, dass $\hat{c}_n(1) := \frac{1}{n}\sum_{t=2}^n X_t X_{t-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_2 X_1]$. Geben Sie auf Basis von $\hat{c}_n(0)$ und $\hat{c}_n(1)$ einen konsistenten Schätzer für $\sigma^2(1-\theta)^2$ an.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1(a) von Blatt 9.

(2+2+3+1) Punkte)

Beweis. (i) Es ist für $t = 1, ..., n$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \theta\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] = 0,$$

und für $t = 1, ..., n$, $k = 0, ..., t-1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}(X_t, X_{t-k}) &= \mathrm{Kov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta\varepsilon_{t-k-1}) \\
&= \mathrm{Kov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) + \theta\mathrm{Kov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k-1}) + \theta\mathrm{Kov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) \\
&\quad + \theta^2\mathrm{Kov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k-1}) \\
&= \begin{cases} \sigma^2 + 0 + 0 + \theta^2\sigma^2, & k = 0, \\ 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0, & k = 1, \\ 0 + 0 + 0 + 0, & k \geq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2, & k = 0, \\ \theta\sigma^2, & k = 1, \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir damit (das ist $\mathrm{Kov}(X_t, X_{t-k})$ für $k = 0$),

$$\mathrm{Var}(X_t) = (1+\theta^2)\sigma^2.$$

Damit folgt für die Korrelation

$$\rho(X_t, X_{t-k}) = \frac{\mathrm{Kov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X_{t-k})}} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{\theta}{1+\theta^2}, & k = 1, \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

(ii) Es ist bekannt, dass $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt sind. Aus Aufgabe 1 (ii) folgt, dass

$$(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n) \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{\sigma^2 \cdot I_{(n+1)\times(n+1)}}_{=:\tilde{\Sigma}}).$$

Mit der Regel $(*)$ folgt

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \sim N(0, \underbrace{A\tilde{\Sigma}A'}_{=:\Sigma}),$$

(offensichtlich hat A vollen Zeilenrang) d.h. auch $(X_1, ..., X_n)$ ist multivariat normalverteilt. Die Kovarianzmatrix Σ muss nicht mittels $A\tilde{\Sigma}A'$ berechnet werden, da wir die Kovarianzen bereits in (i) bestimmt haben und nach Aufgabe 1 (iii) die Einträge von Σ genau den Kovarianzen entsprechen. Daher ist für $t = 1, ..., n$ und $k = 0, ..., t-1$,

$$\Sigma_{t,t-k} = \sigma^2\Big((1+\theta^2) \cdot \mathbb{1}_{\{k=0\}} + \theta \cdot \mathbb{1}_{\{k=1\}}\Big),$$

und aufgrund der Symmetrie der Kovarianzmatrix folgt für $i, j = 1, ..., n$,

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2\Big((1+\theta^2) \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=0\}} + \theta \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=1\}}\Big).$$

(iii) Es gilt

$$\mathbb{E}[\hat{c}_n(0)] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{E}[X_t^2] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sigma^2(1+\theta^2) = \sigma^2(1+\theta^2) = \mathbb{E}[X_1^2],$$

und

$$\mathrm{Var}(\hat{c}_n(0)) = \frac{1}{n^2}\sum_{s,t=1}^{n}\mathrm{Kov}(X_t^2, X_s^2) \leq \frac{2}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=0}^{t-1}|\mathrm{Kov}(X_t^2, X_{t-k}^2)|.$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}(X_t^2, X_{t-k}^2) &= \mathbb{E}[X_t^2 X_{t-k}^2] - \mathbb{E}[X_t^2]\mathbb{E}[X_{t-k}^2] \\
&= \Big(\Sigma_{t,t}\Sigma_{t-k,t-k} + 2\Sigma_{t,t-k}\Sigma_{t,t-k}\Big) - \Big(\Sigma_{t,t}\Sigma_{t-k,t-k}\Big) = 2\Sigma_{t,t-k}\Sigma_{t,t-k} \\
&= 2\sigma^4\Big((1+\theta^2)^2\mathbb{1}_{\{k=0\}} + \theta^2\mathbb{1}_{\{k=1\}}\Big).
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\mathrm{Var}(\hat{c}_n(0)) \leq \frac{4}{n^2}\sigma^2 \cdot \sum_{t=1}^{n}\Big((1+\theta^2)^2 + \theta^2\Big) = \frac{4}{n}\sigma^2\Big((1+\theta^2)^2 + \theta^2\Big) \to 0.$$

Damit folgt $\hat{c}_n(0) - \mathbb{E}[\hat{c}_n(0)] \overset{(2)}{\to} 0$ bzw. $\hat{c}_n(0) \overset{(2)}{\to} \sigma^2(1+\theta^2) = \mathbb{E}[X_1^2]$ und damit (Tschebyscheff) $\hat{c}_n(0) \overset{\mathbb{P}}{\to} \sigma^2(1+\theta^2) = \mathbb{E}[X_1^2]$.

(iv) Nach Voraussetzung und (c) haben wir

$$\hat{c}_n(0) \overset{\mathbb{P}}{\to} \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2(1+\theta^2) =: c(0), \qquad \hat{c}_n(1) \overset{\mathbb{P}}{\to} \mathbb{E}[X_2X_1] = \sigma^2\theta =: c(1).$$

Offensichtlich ist

$$c(0) - 2c(1) = \sigma^2(1-\theta)^2,$$

das heißt, dass $\hat{\theta}_n := \hat{c}_n(0) - 2\hat{c}_n(1)$ ein guter Kandidat für einen konsistenten Schätzer für $\sigma^2(1-\theta)^2$ ist. Da die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = y - 2x$ stetig in $(c(1), c(0)) = (\sigma^2\theta, \sigma^2(1+\theta^2))$ ist, folgt mit dem 9. Übungsblatt, Aufgabe 1 (a),

$$\hat{\theta}_n = h(\hat{c}_n(1), \hat{c}_n(0)) \overset{\mathbb{P}}{\to} h(c(1), c(0)) = c(0) - 2c(1) = \sigma(1-\theta)^2.$$

Kleine Anmerkung: Um hier das gewählte h zu verwenden müssen wir zeigen, dass für einen Skalar $a \in \mathbb{R}$ und Zufallsvariablen mit $X_m \to X$ in Wahrscheinlichkeit eben auch folgt, dass $aX_n \to aX$. Sei $\epsilon > 0$. Es gilt

$$\mathbb{P}(|aX_n - aX| \geq \epsilon) = \mathbb{P}\bigg(|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{|a|}\bigg) \to 0$$

für $n \to \infty$.

□

Aufgabe 4

Sei (X, Y, Z) ein Punkt im dreidimensionalen Koordinatensystem. Wir nehmen an, dass $(X, Y, Z) \sim N(0, I_{3\times 3})$ multivariat normalverteilt ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass (X, Y, Z) zum Koordinatenursprung $(0,0,0)$ höchstens den Abstand 1 besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Phi^{-1}(\mathbb{R}^3)} f(\Phi(y))|\det J_\phi(y)|\mathrm{d}y$$

mit der Transformation

$$\Phi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \Phi(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))$$

mit $|\det J_\Phi(r,\theta,\phi)| = r^2\sin(\theta)$. *Hinweis: Es ist* $\int_0^1 r^2\exp(-r^2/2)\mathrm{d}r \approx \frac{1}{4}$.

(2 Punkte)

Beweis. Gesucht ist

$$\mathbb{P}(X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1).$$

Die gemeinsame Dichte von (X, Y, Z) lautet

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)).$$

Damit gilt mit oben genannter Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^2+Y^2+Z^2 \leq 1) &= \int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}r^2)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= 2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\int_0^1 r^2\exp(-\frac{1}{2}r^2)\mathrm{d}r \\
&\approx \pi\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

□