Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Auf der Packung eines Feuerwerks steht geschrieben, dass die durchschnittliche Lautstärke höchstens $\mu_0 = 100$ Dezibel beträgt. Sie sind skeptisch und vermuten, dass die durchschnittliche Lautstärke höher ist.
Dazu nehmen wir an, dass die Lautstärke beim Abbrennen eines Böllers normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht der durchschnittlichen Lautstärke) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Unter strenger Aufsicht zünden wir nun $n = 10$ der "Superböller"-Feuerwerke unabhängig voneinander an und messen folgende Lautstärken (in Dezibel):

112.0	105.2	98.1	108.7	97.2	102.3	110.1	100.5	103.3	99.0

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student'schen t-Test (Satz 13.8) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass das Intervall
$$S(X_1, ..., X_n) := \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.
Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus Satz 13.4(ii).

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lautstärke μ des Feuerwerks basierend auf unseren Beobachtungen an.

Quantile der t-Verteilung: $t_{9,0.95} = 1.833$, $t_{10,0.95} = 1.812$, $t_{9,0.975} = 2.262$, $t_{10,0.975} = 2.228$.

(2+2+2) Punkte)

Beweis. (a) Wir haben Beobachtungen $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem $\sigma > 0$. Wir wollen einen t-Test zu den Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 100 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

durchführen. Der Fehler 1. Art entspricht der Situation, dass die Lautstärke unter 100 Dezibel liegt. Wir sagen, dass es mehr ist und wir somit den Händler zu Unrecht beschuldigen.
Der t-Test zum Niveau α lautet nach Satz 13.8:

$$\phi^*(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1, & T_n > c^*, \\ 0, & T_n \leq c^*, \end{cases}$$

wobei $c^* = t_{n-1,1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der t_n-Verteilung ist und T_n unten definiert wird.
Hier gilt

$$\begin{aligned}
\overline{X_n} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 103.64,\\
S^2 &:= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = 27.24,\\
T_n &:= \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = 2.21.
\end{aligned}$$

Wegen $t_{n-1,1-\alpha} = t_{9,0.95} = 1.833$ folgt

$$T_n = 2.21 > 1.833 = t_{n-1,1-\alpha} = c^*,$$

d.h. $\phi^*(X_1, ..., X_n) = 1$. Auf Basis unserer Beobachtungen entscheiden wir uns also dafür, den Hersteller zu kontaktieren und auf seinen Fehler hinzuweisen.

(b) Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. Aus Satz 13.4(ii) wissen wir, dass

$$T_n := \frac{\overline{X_n} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}. \tag{1}$$

Beachte zusätzlich: Die t_{n-1}-Verteilung ist symmetrisch um 0 (die Wahrscheinlichkeitsdichte ist symmetrisch um 0), d.h. T_n hat dieselbe Verteilung wie $-T_n$. Wegen $\alpha \in (0,1)$ ist $1 - \frac{\alpha}{2} > 0.5$. Daher ist sicher $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \geq 0$ (Das 0.5-Quantil, d.h. der Median einer symmetrischen Verteilung ist Null. Nun fragen wir mit $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ ein größeres als das 0.5-Quantil ab, daher muss das Ergebnis auch größer oder gleich Null sein.)
Wir rechnen nun die Definition eines Konfidenzintervalls nach. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mu \in S(X_1, ..., X_n)) &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})\\
&= 1 - \mathbb{P}(|T_n| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})\\
&= 1 - \mathbb{P}(T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } -T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})\\
&\overset{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \geq 0}{=} 1 - \mathbb{P}(T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) - \mathbb{P}(-T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})\\
&= 1 - 2\mathbb{P}(T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})\\
&= 1 - 2 \cdot \Big(1 - \underbrace{\mathbb{P}(T_n \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})}_{\overset{(1)}{=} 1-\frac{\alpha}{2}}\Big)\\
&= 1 - \alpha,
\end{aligned}$$

wobei genutzt wurde, dass T_n und $-T_n$ derselben Verteilung folgen. *Anmerkung: Mit einem Verweis auf die Symmetrie der Verteilung genügt die Argumentation* $\mathbb{P}(\mu \in S(X_1, ..., X_n)) = \mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$.

(c) Die Werte von $\overline{X_n}$ und S^2 wurden schon in (a) berechnet. Wir erhalten mit (b) daher folgendes 95%-Konfidenzintervall (d.h. $\alpha = 0.05$ und mit $n = 10$ entsprechend $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9,0.975} = 2.262$):

$$\begin{aligned}
S(X_1, ..., X_n) &= \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]\\
&= [99.907, 107.373].
\end{aligned}$$

Feststellung: Dieses 95%-Konfidenzintervall beinhaltet die vom Händler behaupteten $\mu_0 = 100$ Dezibel. Beachte aber, dass wir in (b) ein zweiseitiges Konfidenzintervall konstruiert haben. Das zum in (a) angewendeten t-Test gehörige Konfidenzintervall ist ein einseitiges Konfidenzintervall (siehe Satz 9.3(i)) der Form

$$\tilde{S}(X_1, ..., X_n) = \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}, \infty\right) = [100.618, \infty). \tag{2}$$

(Das ist übrigens auch eine erlaubte Lösung für Aufgabe (c)). Hier ist $\mu_0 = 100$ wie vom Test aus (a) bereits bekannt nicht enthalten. Formal konstruiert man mit dem Test aus (a) ein Konfidenzintervall mit falschen Parametern $(-\infty, \mu)$ (d.h. man möchte eine endliche Untergrenze für μ), das Konfidenzintervall aus (b) entspricht eher einem Konfidenzintervall mit falschen Parametern $(-\infty, \mu) \cup (\mu, \infty)$ (d.h. man möchte endliche Ober- und Untergrenze für μ). Durch die Möglichkeit, beim Konfidenzintervall in (2) eine Obergrenze von ∞ zu haben, kann die Untergrenze größer gewählt werden.

□

Aufgabe 2

Ein:e Wissenschaftler:in möchte untersuchen, ob die Kenntnisse der Vektorrechnung von Schüler:innen der 12. Klasse eines Gymnasiums besser sind als die von Mathematikstudenten im 3. Semester. Dazu hat er eine Vergleichsarbeit entwickelt, die er nun in einer 12. Klasse mit 10 Schüler:innen sowie in einem Seminar mit 6 Mathematik-Studierenden lösen lässt. Der/die Wissenschaftler:in nimmt an, dass die dabei erreichte Punktzahl (in Prozent) normalverteilt ist mit Mittelwert μ_S (Schüler) bzw. μ_U (Studenten) und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Er erhält folgende Ergebnisse für die Punktzahl (in Prozent):

Schüler/in	81.4	67.8	70.0	66.8	61.9	83.8	61.9	70.9	69.1	78.5
Studierende	54.2	67.6	58.7	62.5	61.4	65.3				

Führen Sie einen Zweistichproben t-Test (Satz 13.11) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob der/die Wissenschaftler:in mit seiner/ihrer Annahme (Schüler:innen besser als Studierende) Recht hat oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entsprechen, dass die Schüler:innen als besser eingeschätzt werden, obwohl es nicht stimmt.
Quantile der t-Verteilung: $t_{14,0.95} = 1.761$, $t_{15,0.95} = 1.753$, $t_{16,0.95} = 1.746$.

(3 Punkte)

Beweis. Laut Aufgabe beobachten wir die Ergebnisse der Schüler:innen $X_1, ..., X_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_S, \sigma^2)$ und die Ergebnisse der Studierenden $Y_1, ..., Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_U, \sigma^2)$, wobei die $X_1, ..., X_m$, $Y_1, ..., Y_n$ gemeinsam unabhängig sind. Hierbei ist $n = 6$ und $m = 10$.
Wir wollen einen Zweistichproben t-Test für die Hypothesen

$$H_0 : \mu_S \leq \mu_U \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_S > \mu_U$$

durchführen. Dann ist der Fehler 1. Art gerade die Situation, sich dafür zu entscheiden, dass Schüler:innen besser sind als Studierende, obwohl dies gar nicht stimmt.
Laut Satz 13.11 lautet der Zweistichproben t-Test zum Niveau α,

$$\phi^*(X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n) = \begin{cases} 1, & T_{m,n} > c^* \\ 0, & T_{m,n} \leq c^*, \end{cases}$$

wobei $c^* = t_{m+n-2,1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der t_{m+n-2}-Verteilung ist und $T_{m,n}$ unten definiert wird. Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{X_m} &:= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = 71.21,\\
\overline{Y_n} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 61.62,\\
S_X^2 &:= \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X_m})^2 = 58.44,\\
S_Y^2 &:= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y_n})^2 = 22.74,\\
S^2 &:= \frac{1}{m+n-2}\Big((m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2\Big) = 45.69,\\
T_{m,n} &:= \frac{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}(\overline{X_m} - \overline{Y_n})}{S} = 2.75.
\end{aligned}$$

Nun ist $t_{m+n-2,1-\alpha} = t_{14,0.95} = 1.761$, d.h. wir haben

$$T_{m,n} = 2.75 > 1.761 = t_{m+n-2,1-\alpha} = c^*.$$

Damit ist $\phi^*(X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n) = 1$, d.h. auf Basis des Tests und unseren Beobachtungen können wir davon ausgehen, dass die Schüler:innen tatsächlich besser sind als die Studierenden, und die Annahme des Wissenschaftlers stimmt. □

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\theta \in (-1,1)$. Seien $X_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\theta^2}\right)$ und $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i = 1, ..., n$. $X_1, ..., X_n$ seien rekursiv definiert durch

$$X_t := \theta \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$$

für $t = 1, ..., n$. Wir gehen davon aus, dass wir nur $X_0, ..., X_n$ beobachten. Sei nun $\theta_0 \in (-1,1)$. Wir wollen auf die Hypothesen $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$ testen. Dafür schlagen wir folgenden Test vor.

$$\phi(X_0, ..., X_n) := \begin{cases} 1, & W_n > k_n, \\ 0, & W_n \leq k_n \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad W_n := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta_0 X_{t-1})^2.$$

(a) Berechnen Sie $k_n > 0$, so dass ϕ ein Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Berechnen Sie ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X_0, ..., X_n)$ für den unbekannten Parameter $\theta \in (-1,1)$, zum Beispiel mit Satz 9.3.

(c) Wir beobachten nun $n = 100$ Werte $X_0, ..., X_n$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\hat{c}_n(0) &:= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 = 2.900,\\
\tilde{c}_n(0) &:= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 2.906,\\
\hat{c}_n(1) &:= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} = 2.436.
\end{aligned}$$

Wir vermuten einen wahren Wert von $\theta_0 = 0.3$. Wie sieht die Testentscheidung von ϕ zum Niveau $\alpha = 0.05$ aus? Geben Sie außerdem ein 95%-Konfidenzintervall für θ an.
Quantile der χ^2-Verteilung: $\chi^2_{100,0.95} = 124.3$, $\chi^2_{100,0.05} = 77.9$.

(2+2+2) Punkte)

Beweis. (a) Gilt die Hypothese $\theta = \theta_0$, d.h.

$$X_t = \theta_0 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

so folgt

$$X_t - \theta_0 \cdot X_{t-1} = \varepsilon_t$$

für $t = 1, ..., n$. Daher ist

$$n \cdot W_n = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \theta_0 X_{t-1})^2 = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 \ \sim \chi_n^2.$$

Es soll gelten

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{P}_{\theta_0}(\phi = 1) = \mathbb{P}(W_n > k_n) = \mathbb{P}(nW_n > nk_n) = 1 - \mathbb{P}(nW_n < nk_n) \\ \iff & \ 1 - \alpha = \mathbb{P}(nW_n < nk_n), \end{aligned}$$

d.h. $nk_n = \chi^2_{n,1-\alpha}$ ($(1-\alpha)$-Quantil der χ^2_n-Verteilung) erfüllt die Gleichung. Daher kann

$$k_n = \frac{\chi^2_{n,1-\alpha}}{n}$$

gewählt werden.

(b) Schreiben wir $\phi_{\theta_0} = \phi$ für den Test aus der Aufgabenstellung. Für den Annahmebereich des Tests gilt

$$\begin{aligned} A(\theta) &:= \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \phi_\theta(x) = 0\} \\ &= \left\{ (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (x_t - \theta x_{t-1})^2 \leq k_n \right\}. \end{aligned}$$

Laut Satz 9.3 ist dann

$$\begin{aligned} S(X_0, ..., X_n) &= \{\theta \in (-1,1) : (X_0, ..., X_n) \in A(\theta)\} \\ &= \left\{ \theta \in (-1,1) : \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \theta X_{t-1})^2 \leq k_n \right\}. \end{aligned}$$

Nun gilt mit $\hat{c}_n(1) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}$, $\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2$, $\hat{\theta}_n := \frac{\hat{c}_n(1)}{\hat{c}_n(0)}$ und mit $\tilde{c}_n(0) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t^2$:

$$\Delta\hat{\theta}_n := \sqrt{\hat{\theta}_n^2 - \left(\frac{\tilde{c}_n(0) - k_n}{\hat{c}_n(0)} \right)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & W_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \theta X_{t-1})^2 = \tilde{c}_n(0) - 2\theta \hat{c}_n(1) + \theta^2 \hat{c}_n(0) = k_n \\ \iff & \ \theta^2 - 2\theta \frac{\hat{c}_n(1)}{\hat{c}_n(0)} + \frac{\tilde{c}_n(0) - k_n}{\hat{c}_n(0)} = 0 \\ \iff & \ \theta_{1/2} = \frac{\hat{c}_n(1)}{\hat{c}_n(0)} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{c}_n(1)}{\hat{c}_n(0)} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{c}_n(0) - k_n}{\hat{c}_n(0)} \right)} = \hat{\theta}_n \pm \Delta\hat{\theta}_n. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$S(X_0, ..., X_n) = \left[\hat{\theta}_n - \Delta\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_n + \Delta\hat{\theta}_n\right] \cap (-1, 1)$$

ist ein gesuchtes Konfidenzintervall.

(c) Mit den gegebenen Werten und $\theta_0 = 0.3$, $n = 100$, $\alpha = 0.05$ erhalten wir

$$W_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta_0 X_{t-1})^2 = \tilde{c}_n(0) - 2\theta_0 \cdot \hat{c}_n(1) + \theta_0^2 \hat{c}_n(0) = 1.706.$$

Daher gilt mit $k_n = \frac{\chi^2_{n,1-\alpha}}{n} = 1.243$ gerade $W_n > k_n$, weswegen $\phi(X_0, ..., X_n) = 1$. D.h. wir verwerfen die Vermutung $\theta_0 = 0.3$ auf Basis des Tests.
Wir berechnen

$$\hat{\theta}_n = \frac{\hat{c}_n(1)}{\hat{c}_n(0)} = 0.840, \qquad \Delta\theta_n = \sqrt{\hat{\theta}_n^2 - \left(\frac{\tilde{c}_n(0) - k_n}{\hat{c}_n(0)}\right)} = 0.363.$$

Damit ist ein gesuchtes Konfidenzintervall laut (b)

$$S(X_0, ..., X_n) = \left[\hat{\theta}_n - \Delta\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_n + \Delta\hat{\theta}_n\right] \cap (-1, 1) = [0.477, 1.203] \cap (-1, 1) = [0.477, 1).$$

□

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 2$ und $X \sim t_n$ t-verteilt mit n Freiheitsgraden.

(i) Zeigen Sie: $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-2}$.
Hinweis: Verwenden Sie Symmetrieargumente für den Erwartungswert und partielle Integration wie folgt $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x \cdot x f_X(x)\mathrm{d}x$, *um eine Gleichung der Form* $\mathbb{E}[X^2] = C_1 + C_2 \cdot \mathbb{E}[X^2]$ *zu erhalten. Diese kann nach* $\mathbb{E}[X^2]$ *aufgelöst werden.*

Für eine Zufallsvariable X sei nun $m_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ $(t \in \mathbb{R})$ die momenterzeugende Funktion.

(ii) Sei $Y \sim N(0, 1)$ und $X = Y^2$. Zeigen Sie, dass $m_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$ für $t < \frac{1}{2}$.

Sei $X \sim \chi^2_n$ Chi-Quadrat-verteilt mit $n \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden.

(iii) Berechnen Sie $m_X(t)$ für $t < \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}[X^3]$.
Hinweis: Nutzen Sie (ii) und Satz 8.17. Ist $Y \sim N(0, 1)$, *so gilt* $\mathbb{E}[Y^4] = 3$ *und* $\mathbb{E}[Y^6] = 15$.

(2+1+2 Punkte)

Beweis. (i) Die Dichte der t_n-Verteilung wurde in der Vorlesung hergeleitet. Für die Dichte von X gilt daher:

$$f_X(x) := f_n(x) = c_n \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$
$$c_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

f_X ist achsensymmetrisch um 0. (Die Bedingung $n > 2$ wird benötigt, damit die Dichte $|f_X| \leq C \cdot \frac{1}{x^4}$ für große x erfüllt und das Integral überhaupt endlich ist.)
Es folgt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = 0,$$

da über eine punktsymmetrische Funktion integriert wird.
Für die Varianz $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= c_n \int_{\mathbb{R}} x \cdot x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{d}x \\
&= c_n \left(\left[-x \cdot \frac{n}{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{n}{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x \right) \\
&= 0 + \frac{n}{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \cdot f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{n-1} \left(1 + \frac{\mathbb{E}[X^2]}{n}\right)
\end{aligned}$$

d.h.

$$(n-1)\mathbb{E}[X^2] = n + \mathbb{E}[X^2],$$

woraus folgt, dass

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{n}{n-2}.$$

(ii) Es gilt für $t < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tY^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2t)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1-2t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2t)^{-1}}} e^{-\frac{x^2}{2(1-2t)^{-2}}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

(iii) Da $X \sim \chi_n^2$, ist X (in Verteilung) darstellbar als $X = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ mit $Y_1, ..., Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Es folgt

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^n Y_i^2}] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tY_i^2}\right] \overset{\text{Satz 8.17}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tY_i^2}] \overset{(b)}{=} \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-1/2} = (1-2t)^{-n/2}.$$

Da $X \sim \chi_n^2$, lässt sich X darstellen als $X = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ mit $Y_1, ..., Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^3] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right)^3\right] = \sum_{i,j,k=1}^n \mathbb{E}[Y_i^2 Y_j^2 Y_k^2] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i^6] + 3 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \mathbb{E}[Y_i^4 Y_j^2] + \sum_{i,j,k=1, i\neq j\neq k\neq i}^n \mathbb{E}[Y_i^2 Y_j^2 Y_k^2] \\
&= n\mathbb{E}[Y_1^6] + 3n(n-1)\mathbb{E}[Y_1^4]\mathbb{E}[Y_1^2] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[Y_1^2]^3 \\
&= 15n + 3n(n-1) \cdot 3 + n(n-1)(n-2) \\
&= n(n+2)(n+4).
\end{aligned}$$

$\square$