Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Falls $A \subseteq B$, so folgt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(ii) Für $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ gilt $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$.

(iii) Gilt $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in N$, so folgt $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Man erinnere sich an den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Es gilt, dass $\binom{n}{k} \overset{(*)}{=} \binom{n}{n-k}$.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(ii) Geben Sie kombinatorische Interpretationen für $(*)$ und die Formel aus (i) an.

(2+1 Punkte)

Aufgabe 4

Nutzen Sie ihr Wissen über Kombinatorik um folgende Fragen zu beantworten.

(i) Wir betrachten ein regelmäßiges N-Eck. Wie viele Linien entstehen, wenn man alle Punkte miteinander verbindet?

(ii) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(iii) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

(iv) Wie viele 4-stellige Zahlen mit Quersumme 9 gibt es?

(v) Die Lottoziehung (6 aus 49) ist vorbei, die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

(vi) Wir haben N Bücher. Unter diesen Büchern gibt es M gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die N Bücher in einem Regel nebeneinander anzuordnen?

(6 Punkte)

Geben Sie ihre Lösungen bis spätestens **Freitag, den 28. Oktober 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.