Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ und $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung

$$\mathbb{P}(\,\cdot\,|B) : A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$$

für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert wird.

(3 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\emptyset$ und Ω von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig sind.

(ii) Zeigen Sie: Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.

(iii) Ein fairer Würfel (die Augenzahlen von 1 bis 6 werden liegen mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben), werde zweimal unabhängig voneinander geworfen (siehe Beispiel 1.2 (ii) im Skript).
Wir definieren die folgenden Ereignisse.

$$\begin{aligned} A &= \text{'Die erste Augenzahl ist gerade'}, \\ B &= \text{'Die zweite Augenzahl ist gerade'}, \\ C &= \text{'Die Summe der Augenzahlen ist ungerade'}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig, aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Ein Würfel wird N-mal unabhängig geworfen, wobei N eine zufällige Zahl sei. Sei A_n das Ereignis, dass $N = n$ und S_M das Ereignis, dass die Summe der geworfenen Augenzahl gleich M ist. Des Weiteren möchten wir Folgendes annehmen.

(a) Für jeden der Würfelwürfe gilt: Alle sechs Seiten liegen mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben (Der Würfel ist *fair*),

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$.

Wir möchten das obige Experiment modellieren.

(i) Geben Sie eine geeignete nichtleere Menge Ω von Stichproben und eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ an, sodass $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und (a) und (b) erfüllt sind.

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(ii) $\mathbb{P}(A_2|S_4)$,

(iii) $\mathbb{P}(S_4|A_G)$, wobei A_G das Ereignis bezeichnet, dass N gerade ist.

(7 Punkte)

Aufgabe 4

Sie seien nun Teilnehmer:in einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem der Tore ist ein Auto, hinter den anderen jeweils eine Ziege. Die Objekte wurden vor der Show zufällig auf die Tore verteilt.

Sie wählen ein Tor. Daraufhin öffnet der Showmaster (Dieser weiß, was hinter den Toren ist), ein anderes Tor (Hat er zwei Möglichkeiten, wählt er aus beiden mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Er fragt Sie nun, ob Sie ihre Entscheidung ändern möchten. Ist es von Vorteil, das andere Tor zu wählen?

Definieren Sie zur Lösung die Ereignisse A_i := 'Hinter Tor i ist das Auto' und B_j := 'Moderator öffnet Tor j'. Drücken Sie nun die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten eines Gewinns mittels A_i und B_j für $i, j = 1, 2, 3$ aus.

(3 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 4. November 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.