Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Es sei p_1 die Zähldichte der Binomial-Verteilung $\mathcal{B}(n,p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$.

(i) Zeigen Sie die Rekursionsformel

$$p_1(k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot p_1(k)$$

für $k = 0, 1, ..., n-1$.

Sei p_2 die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung $\mathcal{H}(N,M,n)$ für $N,M,n \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen zeigen, dass sich diese für $N,M \to \infty$ und $\frac{M}{N} \to p$ durch die Zähldichte der Binomialverteilung mit Parametern (n,p) approximieren lässt.

(iii) Zeigen Sie, dass für $k = 0, \dots n$

$$p_2(k) \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

für $N, M \to \infty$.

(iii) Sie haben eine Münze, welche bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ 'Kopf' anzeigt. Sie werfen diese Münze nun n-mal hintereinander und zählen die Anzahl k_1 der Köpfe. Danach wirft jemand anderes die Münze noch weitere m-mal und zählt ebenfalls die Anzahl k_2 der Köpfe. Welcher Verteilung folgt die Summe der Anzahlen $k_1 + k_2$ der Köpfe?
Sie dürfen für den Beweis folgende Rechenregel verwenden:

$$\sum_{k_1=0}^{k} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{m}{k-k_1} = \binom{m+n}{k}$$

für $k \leq m+n$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. **(1+2+2 Punkte)**

Aufgabe 2

Entscheiden Sie jeweils, welche diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Modellierung der folgenden Probleme geeignet ist und geben Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten deren Parameter an.

(i) Sie werfen einen fairen Würfel, bis das erste Mal eine '6' auftritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man mehr als 9-mal würfeln?

(ii) Eine Firma produziert insgesamt 350 elektronische Bauteile des gleichen Typs für einen Kunden. Die Firma weiß, dass genau 5 Teile defekt sind, aber nicht welche. Um die Qualität zu prüfen untersucht der Kunde die Bauteile mittels einer Stichprobe. Dazu werden zufällig 20 Bauteile herausgenommen und untersucht. Wenn mehr als ein defektes Bauteil gefunden wird, wird die Sendung zurückgeschickt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Warensendung wieder zurück geschickt wird?

(iii) Ein Insekt legt 100 Eier, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Aus jedem Ei schlüpft mit Wahrscheinlichkeit 0.01 ein Nachkomme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 2 Nachkommen gibt?

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 3

Wir haben einen Würfel, bei welchem die Augenzahl '3' bei einem Würfelwurf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ auftritt. Wir haben die Vermutung, dass die '3' häufiger kommt als es bei einem fairen Würfel (alle Zahlen gleichwahrscheinlich) der Fall wäre. Ganz konkret vermuten wir, dass die '3' tatsächlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% auftritt. Um dies zu überprüfen, werfen wir den Würfel solange, bis das erste Mal '3' erscheint. Die Anzahl der benötigten Würfe (einschließlich des Wurfs mit der '3') bezeichnen wir mit k. Auf Basis dieses Versuchs wollen wir nun einen Test durchführen, ob unsere Vermutung richtig ist.

(a) Formulieren Sie das Testproblem mathematisch. Wählen Sie Null- und Alternativhypothese so, dass die folgende Forderung den Fehler 1. Art beschränkt: "Der peinliche Irrtum zu behaupten, dass ein unfairer Würfel (bzgl. der '3') vorliegt, obwohl der Würfel eigentlich fair ist, soll maximal mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% auftreten".

(b) Bestimmen Sie den Neyman-Pearson-Test für das Testproblem aus (a) und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

(c) Sei nun wieder $\alpha \in [0, 1]$ beliebig. Unter welchen Bedingungen ist der Test aus (b) ein gleichmäßig bester Test für die Hypothesen $H_0 : p = \frac{1}{6}$ gegen $H'_A : p \in \{p' : p' > \frac{1}{6}\}$?

(2+3+1 Punkte)

Aufgabe 4

Auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, versehen mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, seien zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ durch die folgenden Zähldichten p und q gegeben:

ω	1	2	3	4
$p(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$q(\omega)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Es soll die Hypothese $H_0 = \{\mathbb{P}\}$ gegen die Alternative $H_A = \{\mathbb{Q}\}$ getestet werden.

(a) Formulieren Sie für dieses Testproblem den Test ϕ aus dem Neyman-Pearson-Lemma. Für welche $\alpha \in [0, 1]$ existiert ϕ und wann liefert er einen optimalen Test zum Niveau α?

(b) Berechnen Sie für die Werte von α aus (a) auch jeweils die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art des optimalen Tests.

(4 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 11. November 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.