Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Sei Ω eine nichtleere und abzählbare Menge und $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Sei des weiteren $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable.

(i) Zeigen Sie, dass die von X induzierte Verteilung $\mathbb{P}^X$ in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega^X, \mathcal{P}(\Omega^X)$ definiert.

Wir betrachten eine diskrete Zufallsvarible $Y : \Omega^X \to \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie die Verträglichkeit des Bildmaßes mit der Komposition von Abbildungen, d.h. zeigen Sie

$$\left(\mathbb{P}^X\right)^Y = \mathbb{P}^{(Y \circ X)}.$$

(3+2 Punkte)

Aufgabe 2

Auf einem Jahrmarkt bietet ein Stand folgendes Gewinnspiel an.
Auf einem Glücksrad sind die Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 abgebildet. Wenn Sie einmal drehen, kommen alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Sie drehen das Glücksrad (bei gleicher Ausgangsposition) nun zweimal unabhängig voneinander. Sie gewinnen, wenn die größte dabei erschienene Zahl genau eine -1 ist.

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ an, der das obige Zufallsexperiment geeignet darstellt.
Definieren Sie dann eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die einem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ die größte erschienene Zahl zuordnet.

(ii) Geben Sie die Elemente von $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1\}$ an und berechnen Sie $\mathbb{P}(X = -1)$.

(iii) Geben Sie den induzierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^X, \mathcal{P}(\Omega^X), \mathbb{P}^X)$ von X an.

(iv) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(2+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von X sei mit $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass F monoton wachsend ist. Das heißt, dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$,

(iii) Zeigen Sie, dass F rechtsseitig stetig ist, d.h. für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \searrow x$ gilt $F(x_n) \to F(x)$.

Hinweis für (ii), (iii): Nutzen Sie Aufgabe 1(iii) von Blatt 1.

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ ihre Verteilungsfunktion.

(a) Sei $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie F.

(b) Sei nun $X \sim \mathcal{G}(p)$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0, 1)$. Berechnen Sie F.

(2+2 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 18. November 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.