Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte existieren.

(i) Es gelte $X \geq 0$, d.h. für $\omega \in \Omega$ gilt $X(\omega) \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(ii) Es gelte $X \geq Y$. Folgern Sie, dass $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$.

(iii) Falls $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ so gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[(X-a)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = \mathbb{E}[X]$.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

(ii) Berechnen Sie unter Verwendung der Resultats aus (i) den Erwartungswert im Falle, dass $X \sim \mathcal{G}(p)$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0,1)$ ist.

(iii) Falls X nichtnegativ und stetig verteilt ist mit Verteilungsfunktion F_X, so kann man mit ähnlichen Mitteln wie in (i) zeigen, dass

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Berechnen Sie mittels (1) den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(2+1+1 Punkte)

Aufgabe 3 (a) Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0,0)$ und Radius 1. Nun wird ein Punkt Z auf der oberen Hälfte der Kreislinie zufällig ausgewählt, wobei jeder Punkt auf der oberen Hälfte der Kreislinie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in Frage kommt. Sei A die Fläche des Dreiecks, das von den Punkten $(0,0)$, $(0,1)$ und Z gebildet wird. Berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz von A.

(b) Auf einem Tisch liegen 10 Euro. In jedem Spielzug werfen Sie eine Münze mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ für 'Kopf'. Werfen Sie 'Kopf', erhalten Sie den gesamten Geldbetrag auf dem Tisch und das Spiel ist beendet. Werfen Sie 'Zahl', wird der Geldbetrag auf dem Tisch halbiert.
Sei X der Geldbetrag, den Sie bei diesem Spiel erhalten. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. Wie groß sollte p sein, damit Sie im Durchschnitt bei diesem Spiel mindestens 5 Euro gewinnen?

(c) In einem Spiel ziehen Sie ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n von 1 bis n durchnummerierten Kugeln. Das Spiel ist beendet, sobald ein gezogener Wert kleiner ist als der zuvor gezogene Wert. Vor jedem Zug erhalten Sie einen Euro. Wie viel Euro werden Sie im Mittel erhalten?
Hinweis: Definieren Sie für $k = 1, ..., n$ Zufallsvariablen

$$X_k := \begin{cases} 1, & \textit{Sie dürfen den } k\textit{-ten Zug durchführen,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und stellen Sie den Gewinn eines Spiels durch die X_k dar.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Gruppe von n (perfekten) Jäger:innen schießt auf m Enten, wobei sich jede:r Jäger:in sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jäger:innen auswählt. Insbesondere kann eine Ente also von mehreren Jäger:innen ausgewählt werden. Sei X die Anzahl der bei diesem Massaker überlebenden Enten.

(a) Berechnen Sie Erwartungswert von X.
Hinweis: Nummerieren Sie die Enten von 1 bis m und definieren Sie das Ereignis $A_i :=$ "Die i-te Ente überlebt". Drücken Sie X durch die Zufallsvariablen $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ aus.

(b) Berechnen Sie die Varianz von X.

(c) Sei nun $m = n = 50$. Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und die Ergebnisse aus (a), um ein Intervall $[m_1, m_2]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, anzugeben, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der überlebenden Enten liegt.
Anmerkung: Solch ein Intervall wird auch 90%-Konfidenzintervall genannt.

(2+2+2 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 2. Dezember 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.