Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stetig verteilte Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichte durch

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot xy \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y \le 2\}} = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \le x \le y \le 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

(i) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass $f_{X,Y}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(ii) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X bzw. Y.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X + Y \le 1)$ und $\mathbb{P}(2X \ge Y)$.

(iv) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \cdot Y]$.

(v) Sind X, Y stochastisch unabhängig?

(1+1+2+1+1 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stochastisch unabhängige und stetig verteilte Zufallsvariablen.

(i) Sei $Z := X + Y$. Zeigen Sie, dass Z ebenfalls stetig verteilt ist mit Wahrscheinlichkeitsdichte
$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$
Z wird auch als *Faltung* von X, Y bezeichnet.

(ii) Seien $X, Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie die Verteilung von $X + Y$.

(iii) Seien nun $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Zeigen Sie, dass
$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

(iv) Es bezeichne nun f_X bzw. f_Y die Wahrscheinlichkeitsdichten von X bzw. Y. Zeigen Sie, dass die Dichte von $Z := \frac{X}{Y}$ gegeben ist durch
$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |y| \cdot f_X(z \cdot y) \cdot f_Y(y) \mathrm{d}y.$$
Sei nun $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt. Berechnen Sie die Dichte von Z.

(2+1+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Ein sechsseitiger, fairer Würfel wird zweimal (unabhängig voneinander) geworfen. Seien X, Y Zufallsvariablen, welche die zwei Ergebnisse der Würfelwürfe angeben.

(i) Geben Sie die gemeinsame Zähldichte $p_{X,Y}(x,y)$ für die Zufallsvariablen X, Y an.

(ii) Wir definieren $M := \max\{X, Y\}$. Berechnen Sie die gemeinsame Zähldichte $p_{X,M}(x,m)$ von X, M.

(iii) Berechnen Sie die Randdichte $p_M(m)$ von M.

(iv) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, M) := \mathbb{E}[X \cdot M] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[M]$.

(2+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ und Verteilungsfunktion F. Seien für $t \in \mathbb{R}$

$$\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2, \qquad \hat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}$$

der Stichprobenmittelwert, die Stichprobenvarianz und die empirische Verteilungsfunktion.

(i) Zeigen Sie, dass $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X_n}^2\right)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n^2]$ in Termen von n, μ, σ^2.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung von $n \cdot \hat{F}_n(t)$ und geben Sie dann $\mathbb{E}[\hat{F}_n(t)]$ und $\mathrm{Var}(\hat{F}_n(t))$ in Termen von $n, F(t)$ an.

(2+2 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 9. Dezember 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.