UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen.

(i) Seien $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ Poisson-verteilt mit Parametern $\lambda, \mu > 0$. Berechnen Sie die Verteilung von $Z := X + Y$.

(ii) Seien $X, Y \sim \mathcal{R}[0,1]$ gleichverteilt auf $[0,1]$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_Z von $Z := \max(X, Y)$.

(1+2 Punkte)

Aufgabe 2

Ein Hersteller behauptet von seinen Glühbirnen, dass diese 10 Kilostunden lang Licht spenden, ehe sie durchbrennen. Wir sind skeptisch und vermuten, dass die wahre Lebensdauer der Glühbirnen geringer ist. Für eine statistische Untersuchung nehmen wir an, dass die Lebensdauer (in Kilostunden) einer Glühbirne Exponential-verteilt ist mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$, wobei in dieser Modellierung (vgl. Erwartungswert einer Exponentialverteilung) dann $\frac{1}{\lambda}$ für die mittlere Lebensdauer steht. Wir kaufen $n = 10$ Glühbirnen, und erhalten folgende Lebensdauern (in 1000 Stunden):

8.2	4.4	7.3	5.1	10.2	12.6	5.5	9.3	7.1	3.8

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ Exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Nutzen Sie das auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ verallgemeinerte Neyman-Pearson-Lemma, um einen besten Test $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ für die einfachen Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

mit $\lambda_1 > \lambda_0$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ anzugeben.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Dichte f_λ der gemeinsamen Verteilung $\mathbb{P}_\lambda = \mathbb{P}^{X_1,...,X_n}$ von $X_1, ..., X_n$.

(b) Vereinfachen Sie ϕ^*, indem Sie zeigen, dass der Likelihood-Quotient monoton ist. Folgern Sie, dass ϕ^* sogar gleichmäßig bester Test ist für

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : \lambda > \lambda_0.$$

(c) Zeigen Sie, dass ϕ^* sogar gleichmäßig bester Test ist für

$$H_0' : \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : \lambda > \lambda_0.$$

Hinweis: Definieren Sie $Z_n := \lambda \cdot \sum_{i=1}^n X_i$. Überlegen Sie sich, dass die Verteilung von Z_n nicht mehr von λ abhängt. Zeigen Sie dann, dass $\mathbb{P}_\sigma(\phi^* = 1) \leq \alpha$ gilt für $\lambda \leq \lambda_0$.

(d) Es ist bekannt, dass $Z_n \sim \Gamma(n,1)$, wobei $\Gamma(n,1)$ die Gamma-Verteilung bezeichnet. Es bezeichne $\Gamma_{n,1,\alpha}$ das α-Quantil dieser Verteilung. Berechnen Sie c^{**} in Termen von λ_0 und $\Gamma_{n,1,\alpha}$.

(e) Wir drücken nun die Abhängigkeit des Tests ϕ^* von λ_0 explizit aus, indem wir ihn mit $\phi^*_{\lambda_0}$ bezeichnen. Bestimmen Sie den Annahmebereich $A(\lambda_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi^*_{\lambda_0}(x) = 0\}$ des Tests und damit ein gleichmäßig bestes $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X)$ für λ. Für welche falschen Parameter wurde dieses Intervall konstruiert?

(f) Sei nun $\alpha = 0.05$. Werden Sie den Hersteller der Glühbirnen auf Basis unserer Beobachtungen und des Tests ϕ^* aus (b) vorwerfen, dass die Angabe der Standardabweichung falsch ist? Geben Sie auf Basis unserer Beobachtungen das 95%-Konfidenzintervall für λ aus (e) an.
Hinweis: Hier sind einige Quantile der $\Gamma(n,1)$*-Verteilung:* $\Gamma_{10,1,0.05} = 5.426$, $\Gamma_{10,1,0.95} = 15.706$.

(2+1+2+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 3

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ normalverteilt mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und festem $\sigma_0^2 = 5$, und $\mathbb{P}_\mu := \mathbb{P}^{X_1,...,X_n}$ die gemeinsame Verteilung dieser Zufallsvariablen.

(a) Sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}, \quad \phi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & |\mu_0 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i| > \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Hypothesen

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

ist, wobei $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.

(b) Konstruieren Sie mittels Satz 9.3 aus ϕ ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X)$ für μ.

(c) Sei nun $\alpha = 0.1$. Wie groß muss die Anzahl der Beobachtungen n gewählt werden, damit die Länge von $S(X)$ kleiner als 1 ist?

(2+1+1 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 16. Dezember 2022 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.