Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, Y_n, X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass aus $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X, Y_n \overset{\mathbb{P}}{\to} Y$ folgt, dass

$$X_n + Y_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X + Y.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen X konvergiert, falls

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$$

für $n \to \infty$.

(iii) Zeigen Sie folgende Aussage. Der stochastische Grenzwert und der Grenzwert im quadratischen Mittel einer Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ist mit Wahrscheinlichkeit 1 eindeutig.

(iv) Beweisen sie, dass für zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ gilt, falls eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ und $X_n \overset{(2)}{\to} Y$.

(1+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Zeigen Sie die so genannte *Markov-Ungleichung*:
Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable, $f : \mathrm{Bild}(X) \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion und $\varepsilon > 0$ mit $f(\varepsilon) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(\varepsilon)}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}]$ *und fügen Sie dann* $1 = \frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}$ *an geeigneter Stelle ein.*

(ii) Folgern Sie aus (i) die Tschebyscheff-Ungleichung aus der Vorlesung.

(iii) Seien $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $0 \leq X_i \leq 1$ für alle $i = 1, ..., n$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$

Hinweis: Nutzen Sie (i) mit $f(x) = \exp(z \cdot x)$*, wobei* $z > 0$ *noch geeignet zu bestimmen ist. Definieren Sie* $Y_i := X_i - \mathbb{E}[X_i]$ *und verwenden Sie die Konvexität von* $\exp$*, um* $\exp(zY_i) \leq \left(\frac{1-Y_i}{2}\right)\exp(-z) + \left(\frac{Y_i+1}{2}\right)\exp(z)$ *zu zeigen. Verwenden Sie* $\exp(z) + \exp(-z) \leq 2\exp(\frac{z^2}{2})$*, um* $\mathbb{E}[\exp(zY_i)]$ *nach oben abzuschätzen.*

(iv) Seien nun $Y_1, ..., Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}$ die empirische Verteilungsfunktion. Zeigen Sie mittels (iii), dass

$$\mathbb{P}\Big(|\hat{F}_n(t) - F(t)| \geq \varepsilon\Big) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot n\right).$$

(1+1+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(i) Sei $U \sim \mathcal{R}[0,1]$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $X_n \xrightarrow{(2)} 0$ gilt.

(ii) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann folgt: $X_n \xrightarrow{(2)} X$.
Hinweis: Nutzen Sie $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ *und ohne Beweis die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: Sind* $Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ *Zufallsvariablen, so gilt für* $p, q > 0$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*:* $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$.

(iii) Zeigen Sie, dass die X_n, X aus (i) die Bedingungen aus (ii) nicht erfüllen.

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 4

Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_E(x,y)$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie die Marginalverteilungen von X und Y.

(ii) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$ sowie $\mathrm{Kov}(X,Y)$ und die Korrelation $\rho(X,Y)$.
Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten $(x,y) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ *bzw.* $x = \sin(\phi)$ *für die 2- bzw. 1-dimensionalen Integrale.*

(iii) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

(1+3+1 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 13. Januar 2023 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.