Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir definieren den Zufallsvektor $X = (X_1, ..., X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\Big),$$

wobei $x = (x_1, ..., x_d)' \in \mathbb{R}^d$, ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^d$.

(ii) $X_1, ..., X_d$ sind genau dann unabhängig und normalverteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $i = 1, ..., d$, wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2)$.

(iii) Für alle $i, j = 1, ..., d$ gilt $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ und $\operatorname{Kov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis die unten stehende Regel $(*)$. Zeigen Sie die Aussage zuerst für $\Sigma = I_{d\times d}$. Betrachten Sie dann $\operatorname{Kov}(Y_i, Y_j)$ mit $Y := \Sigma^{-1/2}(X-\mu)$ für $i, j = 1, ..., d$ und nutzen Sie die Bilinearität der Kovarianz, um auf $\operatorname{Kov}(X_i, X_j)$ für $i, j = 1, ..., d$ zu schließen.

(iv) Beweisen Sie die unten stehende Regel $(*)$ im zwei-dimensionalen Fall.

Regel $(*)$: Sei $X = (X_1, ..., X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit. Sei ferner $p \le d$, $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ mit Rang$(A) = p$, und $b \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $AX + b \sim \mathcal{N}(A\mu + b, A\Sigma A')$.

(1+2+2+2) Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_{1i}X_{1j}] < \infty$ für $i, j = 1, ..., n$, wobei $X_1 = (X_{11}, ..., X_{1n})$. Zeigen Sie, dass der folgende Schätzer für die Kovarianzmatrix Σ,

$$\hat{\Sigma}_{ij} := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_{ki} - X_{\cdot i})(X_{kj} - X_{\cdot j}), \qquad X_{\cdot i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ki}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für Σ ist, d.h. dass $\mathbb{E}[\hat{\Sigma}_{ij}] = \Sigma_{ij}$ gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\sigma > 0$ sowie $\theta \in (-1, 1)$. Wir definieren $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $i = 0, ..., n$. Weiter seien $X_1, ..., X_n$ gegeben durch

$$X_t := \varepsilon_t + \theta \cdot \varepsilon_{t-1} \qquad (t = 1, ..., n).$$

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$, $\operatorname{Kov}(X_t, X_{t-k})$ und $\rho(X_t, X_{t-k})$ für $t = 1, ..., n$ und $k = 0, ..., t-1$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ multivariat normalverteilt ist mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2\Big((1+\theta^2)\cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=0\}} + \theta \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=1\}}\Big) \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Regel $(*)$ *aus Aufgabe 1.*

(iii) Zeigen Sie, dass $\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1^2]$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und zur Berechnung der auftretenden Terme folgende Aussage: „Für $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ *gilt, dass* $\mathbb{E}[X_iX_jX_kX_l] = \Sigma_{ij}\Sigma_{kl} + \Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk}$*."*

(iv) Analog zu (iii) kann gezeigt werden, dass $\hat{c}_n(1) := \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} X_tX_{t-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_2X_1]$. Geben Sie auf Basis von $\hat{c}_n(0)$ und $\hat{c}_n(1)$ einen konsistenten Schätzer für $\sigma^2(1-\theta)^2$ an.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1(a) von Blatt 9.

(2+2+3+1) Punkte)

Aufgabe 4

Sei (X, Y, Z) ein Punkt im dreidimensionalen Koordinatensystem. Wir nehmen an, dass $(X, Y, Z) \sim N(0, I_{3\times 3})$ multivariat normalverteilt ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass (X, Y, Z) zum Koordinatenursprung $(0, 0, 0)$ höchstens den Abstand 1 besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Phi^{-1}(\mathbb{R}^3)} f(\Phi(y))|\det J_\phi(y)|\mathrm{d}y$$

mit der Transformation

$$\Phi : (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \Phi(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta))$$

mit $|\det J_\Phi(r,\theta,\phi)| = r^2\sin(\theta)$*. Hinweis: Es ist* $\int_0^1 r^2\exp(-r^2/2)\mathrm{d}r \approx \frac{1}{4}$.

(2 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 20. Januar 2023 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.