Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Auf der Packung eines Feuerwerks steht geschrieben, dass die durchschnittliche Lautstärke höchstens $\mu_0 = 100$ Dezibel beträgt. Sie sind skeptisch und vermuten, dass die durchschnittliche Lautstärke höher ist.
Dazu nehmen wir an, dass die Lautstärke beim Abbrennen eines Böllers normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht der durchschnittlichen Lautstärke) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Unter strenger Aufsicht zünden wir nun $n = 10$ der "Superböller"-Feuerwerke unabhängig voneinander an und messen folgende Lautstärken (in Dezibel):

112.0	105.2	98.1	108.7	97.2	102.3	110.1	100.5	103.3	99.0

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student'schen t-Test (Satz 13.8) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass das Intervall
$$S(X_1, ..., X_n) := \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
ein $(1 - \alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.
Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus Satz 13.4(ii).

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lautstärke μ des Feuerwerks basierend auf unseren Beobachtungen an.

Quantile der t-Verteilung: $t_{9,0.95} = 1.833$, $t_{10,0.95} = 1.812$, $t_{9,0.975} = 2.262$, $t_{10,0.975} = 2.228$.

(2+2+2) Punkte)

Aufgabe 2

Ein:e Wissenschaftler:in möchte untersuchen, ob die Kenntnisse der Vektorrechnung von Schüler:innen der 12. Klasse eines Gymnasiums besser sind als die von Mathematikstudenten im 3. Semester. Dazu hat er eine Vergleichsarbeit entwickelt, die er nun in einer 12. Klasse mit 10 Schüler:innen sowie in einem Seminar mit 6 Mathematik-Studierenden lösen lässt. Der/die Wissenschaftler:in nimmt an, dass die dabei erreichte Punktzahl (in Prozent) normalverteilt ist mit Mittelwert μ_S (Schüler) bzw. μ_U (Studenten) und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Er erhält folgende Ergebnisse für die Punktzahl (in Prozent):

Schüler/in	81.4	67.8	70.0	66.8	61.9	83.8	61.9	70.9	69.1	78.5
Studierende	54.2	67.6	58.7	62.5	61.4	65.3				

Führen Sie einen Zweistichproben t-Test (Satz 13.11) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob der/die Wissenschaftler:in mit seiner/ihrer Annahme (Schüler:innen besser als Studierende) Recht hat oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entsprechen, dass die Schüler:innen als besser eingeschätzt werden, obwohl es nicht stimmt.
Quantile der t-Verteilung: $t_{14,0.95} = 1.761$, $t_{15,0.95} = 1.753$, $t_{16,0.95} = 1.746$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\theta \in (-1,1)$. Seien $X_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\theta^2}\right)$ und $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i = 1, ..., n$. $X_1, ..., X_n$ seien rekursiv definiert durch

$$X_t := \theta \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$$

für $t = 1, ..., n$. Wir gehen davon aus, dass wir nur $X_0, ..., X_n$ beobachten. Sei nun $\theta_0 \in (-1,1)$. Wir wollen auf die Hypothesen $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$ testen. Dafür schlagen wir folgenden Test vor.

$$\phi(X_0, ..., X_n) := \begin{cases} 1, & W_n > k_n, \\ 0, & W_n \leq k_n \end{cases} \qquad \text{mit} \quad W_n := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta_0 X_{t-1})^2.$$

(a) Berechnen Sie $k_n > 0$, so dass ϕ ein Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Berechnen Sie ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X_0, ..., X_n)$ für den unbekannten Parameter $\theta \in (-1,1)$, zum Beispiel mit Satz 9.3.

(c) Wir beobachten nun $n = 100$ Werte $X_0, ..., X_n$ und erhalten

$$\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 = 2.900,$$
$$\tilde{c}_n(0) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 2.906,$$
$$\hat{c}_n(1) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} = 2.436.$$

Wir vermuten einen wahren Wert von $\theta_0 = 0.3$. Wie sieht die Testentscheidung von ϕ zum Niveau $\alpha = 0.05$ aus? Geben Sie außerdem ein 95%-Konfidenzintervall für θ an.
Quantile der χ^2-Verteilung: $\chi^2_{100,0.95} = 124.3$, $\chi^2_{100,0.05} = 77.9$.

(2+2+2) Punkte)

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}, n > 2$ und $X \sim t_n$ t-verteilt mit n Freiheitsgraden.

(i) Zeigen Sie: $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-2}$.
Hinweis: Verwenden Sie Symmetrieargumente für den Erwartungswert und partielle Integration wie folgt $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x \cdot x f_X(x)\mathrm{d}x$, um eine Gleichung der Form $\mathbb{E}[X^2] = C_1 + C_2 \cdot \mathbb{E}[X^2]$ zu erhalten. Diese kann nach $\mathbb{E}[X^2]$ aufgelöst werden.

Für eine Zufallsvariable X sei nun $m_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ $(t \in \mathbb{R})$ die momenterzeugende Funktion.

(ii) Sei $Y \sim N(0,1)$ und $X = Y^2$. Zeigen Sie, dass $m_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$ für $t < \frac{1}{2}$.

Sei $X \sim \chi_n^2$ Chi-Quadrat-verteilt mit $n \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden.

(iii) Berechnen Sie $m_X(t)$ für $t < \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}[X^3]$.
Hinweis: Nutzen Sie (ii) und Satz 8.17. Ist $Y \sim N(0,1)$, *so gilt* $\mathbb{E}[Y^4] = 3$ *und* $\mathbb{E}[Y^6] = 15$.

(2+1+2 Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 27. Januar 2023 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.