Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemenster 2022/23
Dozent: Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Assistenz: Marilena Müller

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie, dass das schwache Gesetz der großen Zahlen aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt.

(b) X_n besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n(x) = \frac{n+1}{2}|x|^n \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$, wobei $x \in \mathbb{R}$. Gibt es eine Zufallsvariable Z mit $X_n \xrightarrow{D} Z$? Geben Sie Z bei Existenz an.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob eine Zufallsvariable Z existiert, sodasst $X_n \xrightarrow{D} Z$, wobei

(i) $X_n \sim \mathcal{R}[0, 1 + \frac{1}{n}]$,
(ii) $X_n \sim \mathcal{E}(n)$,
(iii) $X_n \sim \mathcal{E}(1/n)$.

(1+2+2) Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und X eine weitere Zufallsvariable. Weiter sei $c \in R$ eine deterministische Konstante.

(a) Sei $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$ Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, und $X_n := 1 - X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{D} X$ aber nicht $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

(b) Nun gelte $X_n \xrightarrow{D} c$. Zeigen Sie, dass dann sogar $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ folgt.
Hinweis: Drücken Sie $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon)$ mit der Verteilungsfunktion F_{X_n} von X_n aus.

(c) *Die Delta-Methode:* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen mit $a_n \to \infty$. Sei Z eine Zufallsvariable, sodass $a_n(X_n - c) \xrightarrow{D} Z$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in einer Umgebung von c stetig differenzierbare Funktion mit $g'(c) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann folgt:

$$a_n(g(X_n) - g(c)) \xrightarrow{D} g'(c) \cdot Z.$$

Hinweis: Nutzen Sie eine Taylor-Entwicklung von g um c: Für $x \in \mathbb{R}$ und ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $|\tilde{x} - c| \leq |x - c|$ gilt $g(x) = g(c) + (x - c)g'(c) + (x - c) \cdot (g'(\tilde{x}) - g'(c))$. Nutzen Sie Proposition 14.9 der Vorlesung.

(1+2+2) Punkte)

Aufgabe 3

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}^2$ mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \exp(-y) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}(x, y).$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X|Y = y]$ bzw. $\mathbb{E}[X|Y]$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y|X = x]$ bzw. $\mathbb{E}[Y|X]$.

(2+2) Punkte)

Aufgabe 4

Seien X, Y reelle Zufallsvariablen und sei $\mathrm{Var}(Y) < \infty$. Die sogenannte bedingte Varianz von Y gegeben X ist definiert durch

$$\mathrm{Var}(Y|X) := \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2|X] = \mathbb{E}[Y^2|X] - \mathbb{E}[Y|X]^2.$$

(a) Zeigen Sie:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Y|X]).$$

(b) Zeigen Sie, dass der bedingte Erwartungswert $h^*(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ den Abstand

$$\mathbb{E}[(Y - h(X))^2]$$

unter allen (messbaren) Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minimiert.

(1+2) Punkte)

Geben Sie die Lösungen bis spätestens **Freitag, den 3. Februar 2023 um 11:15 Uhr** im 1. Stock in INF 205 (Mathematikon) vor dem Dekanat in den dafür vorgesehenen Zettelkasten ab.